



ANEXO B – TRATAMENTO E ANÁLISE DE DADOS EXPERIMENTAIS

B.1. Tratamento estatístico de medidas experimentais

Devido a erros aleatórios inerentes ao processo experimental, os valores obtidos das medidas realizadas em um experimento tendem a se distribuir no entorno do valor verdadeiro do mensurando, se forem realizadas muitas medições, o seu valor verdadeiro pode ser estimado utilizando a média aritmética desses valores:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{B.01})$$

onde x_i é o resultado da i -ésima medida, N o número total de medidas feitas e \bar{x} a média aritmética.

Para caracterizar a qualidade do estimador, deve-se determinar a dispersão dos valores experimentais em torno do valor da média, isto é, estimar a partir da análise de N observações o erro que teríamos, com uma dada probabilidade, caso houvessemos realizado uma única determinação.

Quantitativamente a dispersão do conjunto de medidas realizadas pode ser caracterizada pelo desvio padrão do conjunto de medidas, definido como:

$$S_x^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{B.02})$$

onde S_x é o desvio padrão da amostra.

Quando o conjunto de medidas feitas está concentrado em torno da média diz-se que a distribuição possui baixa dispersão e a precisão da medida é alta.

Entretanto, tendo realizado N determinações, o melhor valor disponível é a sua média (\bar{x}), e portanto o interesse maior será em estimar o erro na sua determinação em relação ao valor verdadeiro do mensurando.

O proceso para essa determinação segue uma sequência similar ao descrito para determinação do desvio padrão amostral, ou seja, realizar vários conjuntos de N determinações, calcular os valores das respectivas médias e em seguida a média dessas médias e em seguida o desvio padrão da média das médias, mas essa ação seria dispendiosa e tediosa. Felizmente é possível prever teoricamente o erro que está sujeita a média de N valores medidos, sem ter que obrigatoriamente realizar o processo descrito anteriormente.

Este desvio é chamado de desvio padrão da média, sendo definido como:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{N}} \quad (\text{B.03})$$

onde $S_{\bar{x}}$ é o erro padrão da média.

B.2. Análise de gráficos lineares

É comum na análise experimental de fenômenos físicos, nos depararmos com situações onde duas grandezas x e y se relacionam de forma que y dependa de forma proporcional de x , ou seja:

$$y = A \cdot x + B \quad (\text{B.09})$$

ou

$$y = A \cdot x \quad (\text{B.10})$$

Nesses casos, é possível determinar as constantes A e B para o caso da Equação B.09, ou apenas A para o caso da Equação B.10, que melhor se adequam aos valores experimentais utilizando processos algébricos ou métodos gráficos. De posse dessas constantes é possível expandir a análise do processo experimental para além dos dados (processo de interpolação e/ou extrapolação) obtendo assim um modelo que possa apresentar uma visão mais ampla do fenômeno em estudo que gerou esses valores.

B.2.1. Regressão Linear

Se trata de um método algébrico para determinar a melhor curva que se ajusta a um conjunto de dados experimentais representados em um gráfico tal que esta melhor curva passe pelo maior número de pontos e o mais próximo possível deles.

Para o caso em que são realizadas N medidas de pontos experimentais (x_i, y_i) que se distribuem ao longo de uma reta em um gráfico y vs x , com incertezas Δy iguais associadas a cada medida de y_i , podemos encontrar os coeficientes A e B para a reta que melhor descreve os pontos experimentais utilizando as seguintes expressões:

B.2.1.1. Função do tipo: $y = A \cdot x + B$

$$A = \frac{N \sum_{n=1}^N x_i \cdot y_i - \sum_{n=1}^N x_i \cdot \sum_{n=1}^N y_i}{N \sum_{n=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{n=1}^N x_i\right)^2} \quad (\text{B.15})$$

$$B = \frac{\sum_{n=1}^N x_i^2 \cdot \sum_{n=1}^N y_i - \sum_{n=1}^N x_i \cdot \sum_{n=1}^N x_i \cdot y_i}{N \sum_{n=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{n=1}^N x_i\right)^2} \quad (\text{B.16})$$

com as incertezas S_A e S_B dadas por:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (y_i - A \cdot x_i - B)^2}{N - 2}} \quad (\text{B.17})$$

$$S_A = S \cdot \sqrt{\frac{N}{N \sum_{n=1}^N x_i^2 - (\sum_{n=1}^N x_i)^2}} \quad (\text{B.18})$$

$$S_B = S \cdot \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N x_i^2}{N \sum_{n=1}^N x_i^2 - (\sum_{n=1}^N x_i)^2}} \quad (\text{B.19})$$

B.2.1.2. Função do tipo: $y = A \cdot x$

$$A = \frac{\sum_{n=1}^N x_i \cdot y_i}{\sum_{n=1}^N x_i^2} \quad (\text{B.20})$$

com a incerteza S_A dadas por:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (y_i - A \cdot x_i)^2}{N - 2}} \quad (\text{B.21})$$

$$S_A = \frac{S}{\sqrt{\sum_{n=1}^N x_i^2}} \quad (\text{B.22})$$

B.2.2. Método Gráfico

Descrevemos a seguir um método alternativo para estimar os parâmetros de uma reta, onde as únicas ferramentas necessárias são um lápis (ou caneta) e uma régua.

Antes de traçar um gráfico devemos sempre:

- i. Definir quem é a variável independente e dependente. A variável independente sempre deve ser colocada no eixo x e a variável dependente no eixo y de acordo com a Equação B.09 ou com a equação B.10;
- ii. Verificar o intervalo de variação dos dados experimentais a serem colocados nos eixos x e y para ocupar boa parte do espaço da folha ou gráfico fornecido.
- iii. Dividir os eixos x e y com valores que sejam fáceis de serem visualizados. Evite utilizar números ímpares (exceto número 5 e seus múltiplos), porque é difícil de subdividir;
- iv. Não congestionar os eixos x e y com números, sempre facilitando a leitura;
- v. Nunca coloque os números experimentais nos eixos x ou y, a não que seja para chamar a atenção para algo específico;
- vi. Definir qual a dimensão (unidade) das variáveis que serão colocadas nos eixos x e y, na forma de potência se necessário, e escrever abaixo ou no final dos eixos x e y bem legível;
- vii. Colocar os dados experimentais na forma de um ponto para cada par (x, y) , um pequeno círculo cheio. Note que se colocarmos um círculo cheio muito grande para os pontos poderá ser difícil adicionar barras de erros posteriormente, e se os pontos forem muito pequeno será difícil visualizá-los.

Se as barras de erro forem todas iguais, basta colocar uma vez só e anotar o procedimento em um lugar próximo ao gráfico e se forem muito pequena em relação a divisão da escala do gráfico pode ser omitido.

Para ilustrar o método vamos considerar os dados representados na Figura B.1, e seguir os seguintes passos:

- Inicialmente determine um ponto no meio dos dados experimentais de modo que os pontos estejam metade para cada lado ao traçarmos uma linha vertical e horizontal. Este ponto é chamado também de centro de gravidade dos pontos (CG) no gráfico, e é igual à coordenada correspondente aos valores médios de x_i e y_i : $(\bar{x}=x_m, \bar{y}=y_m)$.
- Coloque ponta de lápis neste ponto CG e com ajuda de uma régua trace duas retas perpendiculares, horizontal e vertical, dividindo gráfico em 4 quadrantes.
- Girando a régua levemente em torno do ponto CG, sempre com ponta do lápis no centro da gravidade dos pontos, determine uma reta que coloque em torno de 16% dos pontos acima da régua e trace uma reta, definindo a inclinação máxima da reta (A_{max}). Para esta reta, a equação que a descreve pode ser escrita como $y=y_m+A \cdot \max(x-x_m)$.
- Novamente, gire em sentido contrário e agora deixe 16% dos pontos abaixo da régua e trace uma reta, definindo a inclinação mínima (A_{min}). Esta reta pode ser descrita pela equação $y=y_m+A \cdot \min(x-x_m)$.
- Prolongue as duas retas já definidas até que elas cruzem o eixo y em $x=0$ para determinar os pontos de interceptação de cada uma delas com o eixo y. Obtenha os valores de B_{max} para a reta de menor inclinação e de B_{min} para a de maior inclinação e, em seguida, obtenha o ponto médio entre os pontos máximo e mínimo de interceptação $B=(B_{max}+B_{min})/2$.
- A partir do ponto $(0,B)$, trace uma reta passando pelo ponto (x_m, y_m) , onde se cruzam as retas de inclinação máxima e mínima, obtendo assim a reta média.

Note que na região delimitada pelas retas de inclinação máxima e mínima ficam aproximadamente 68% dos pontos experimentais em concordância com o conceito de desvio padrão para uma distribuição normal. No exemplo mostrado na Figura B.1, dos 22 pontos experimentais, 15 (68,18 %) estão confinados entre as retas de inclinação máxima e mínima.

Os valores numéricos da reta média podem ser obtidos utilizando-se as expressões:

$$A = \frac{(A_{max} + A_{min})}{2} \quad (B.25)$$

$$B = \frac{(B_{max} + B_{min})}{2} \quad (B.26)$$

com suas respectivas incertezas dadas por:

$$S_A = \frac{|A_{max} - A_{min}|}{2\sqrt{N}} \quad (B.27)$$

$$S_B = \frac{|B_{max} - B_{min}|}{2\sqrt{N}} \quad (B.28)$$

Perceba que os valores das incertezas são inversamente proporcionais à raiz quadrada do número de medidas N , assim, quanto maior número de medidas, menor o erro correspondente.

O método gráfico pode ter algumas variações, sejam na execução ou nos resultados obtidos por cada experimentador. Porém é necessário que em torno de 68% dos pontos experimentais fiquem confinados nas retas de inclinação máxima e mínima (note que se tivermos 10 medidas isto pode significar 6 ou 7 medidas). Quanto maior o número de medidas, mais preciso se torna o método.

Se os pontos têm barras de erros diferentes, siga o mesmo procedimento descrito, mas levando em consideração os pesos relativos de cada ponto. O peso de cada ponto deve ser aproximadamente proporcional ao inverso da barra de erro.

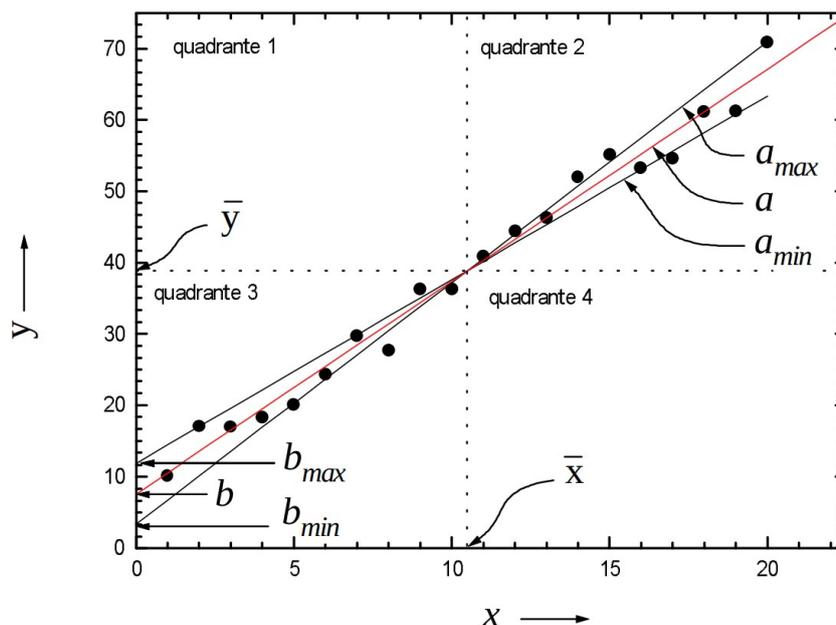


Figura B.1: Método gráfico para determinar os coeficientes angular e linear de uma reta e suas incertezas. As incertezas no parâmetro y são todas iguais às do primeiro ponto experimental.

B.3. Análise de gráficos não lineares redutíveis ao caso linear

Porém, há diversos tipos de fenômenos onde a relação entre as grandezas estudadas não é linear, o que acarreta um desafio extra para a determinação dos seus modelos. Para alguns tipos de modelos não lineares pode-se proceder com um processo conhecido como linearização, que nada mais é do que aplicar uma transformação nas escalas das variáveis para que elas se comportem como grandezas lineares.

O processo de linearização, neste caso pode ser feito de duas formas:

1. Com o uso de papel com escala linear (papel milimetrado): O gráfico pode ser confeccionado em papel com escala linear, desde que os valores das variáveis dependentes e independentes sofram uma transformação de escala conveniente, adequando assim a expressão original em uma que possa ser expressa de forma linear. Pode-se ver alguns exemplos de transformações na Tabela B.2.
2. Com o uso de papel em escala adequada (mono-log ou di-log): Este método se aplica preferencialmente quando a equação que governa o comportamento dos dados segue uma regra tipo potência ($y = A \cdot x^n$) ou exponencial ($y = A \cdot e^{Bx}$).

Roteiro de ação para uso em papel com escala linear:

- unificar as unidades para o mesmo sistema de unidades em uma tabela;
- executar a transformação conveniente das variáveis;
- montar uma tabela com os valores linearizados;
- determinação dos coeficientes A, B e suas respectivas incertezas utilizando o Método de Regressão Linear;
- desenhar os pontos experimentais no gráfico;
- desenhar a reta obtida a partir dos coeficientes no gráfico, para tal, escolha dois pontos X_1 e X_2 e a partir da equação da melhor reta calcular Y_1 e Y_2 ;
- determinar as grandezas derivadas a partir dos coeficientes A e B.

Tabela B.2: Exemplos de transformações de variáveis necessárias para linearização de equações não lineares

Experiência	Fórmula	Y	A	X	B
Queda livre	$y = \frac{g}{2} t^2$	y	$\frac{g}{2}$	t^2	0
Dilatação Linear	$l = l_0(1 + \alpha \Delta \theta)$	l	$l_0 \alpha$	$\Delta \theta$	l_0
Descarga de um Capacitor	$V = V_0 \cdot e^{-t/RC}$	$\ln(V)$	$-1/RC$	t	$\ln(V_0)$
Medida do Campo Magnético de uma bobina	$B = \frac{\mu_0 N I}{2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$	$\ln(B)$	$\frac{-3}{2}$	$\ln(x^2 + R^2)$	$\ln\left(\frac{\mu_0 N I R^2}{2}\right)$
Formação de imagem em uma Lente Fina	$\frac{1}{i} + \frac{1}{o} = \frac{1}{f}$	$\frac{1}{i}$	-1	$\frac{1}{o}$	$\frac{1}{f}$
Equação de Sellmeier	$n^2 = 1 + \frac{C_0 \lambda^2}{(\lambda^2 - C_1)}$	λ^2	C_0	$\frac{\lambda^2}{n^2 - 1}$	C_1
Efeito Fotoelétrico	$hf = eV_0 + \phi$	f	$\frac{e}{h}$	V_0	ϕ
Série de Balmer	$\frac{1}{\lambda} = R \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$	$\frac{1}{\lambda}$	-R	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{R}{4}$
Decaimento Radioativo	$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$	$\ln(N)$	$-\lambda$	t	$\ln(N_0)$

B.4. Incertezas dos instrumentos de medida

De um modo geral, a incerteza de uma medida é proporcional à escala do instrumento de medição. Por padrão, adota-se como incerteza na medida o valor correspondente à metade da menor divisão do instrumento. Nos casos em que o instrumento não é confiável ou se a escala é de difícil leitura, pode-se adotar como incerteza na medida o valor correspondente à menor divisão do mesmo.

B.5. Precisão e exatidão de medidas

Dado um conjunto de N medidas de um determinado parâmetro, podemos verificar duas relações importantes em relação a elas: a precisão e a exatidão das mesmas.

A precisão indica o quanto as medidas efetuadas estão próximas umas das outras. Já a exatidão indica o quanto o valor medido experimentalmente está próximo do valor real ou esperado ou de referência. Uma maneira de representar graficamente os conceitos de precisão e exatidão é mostrado com o exemplo do “tiro ao alvo”, onde um atirador quer acertar o centro do mesmo, que equivale ao valor de referência. Na Figura B.2 podem ser vistos as situações possíveis:

- em a): não houve precisão nem exatidão, pois todos os tiros acertaram pontos distantes do centro do alvo e entre si;
- em b): houve precisão, pois os tiros acertaram pontos bem próximos uns dos outros, mas não houve exatidão, pois os pontos estão distantes do centro;
- em c): houve uma boa exatidão (tiros próximos ao centro), mas a precisão não foi tão boa, pois os tiros acertaram pontos distantes entre si;
- em d): houve exatidão e precisão, pois os tiros acertaram pontos muito próximos ao centro e também próximos entre si.

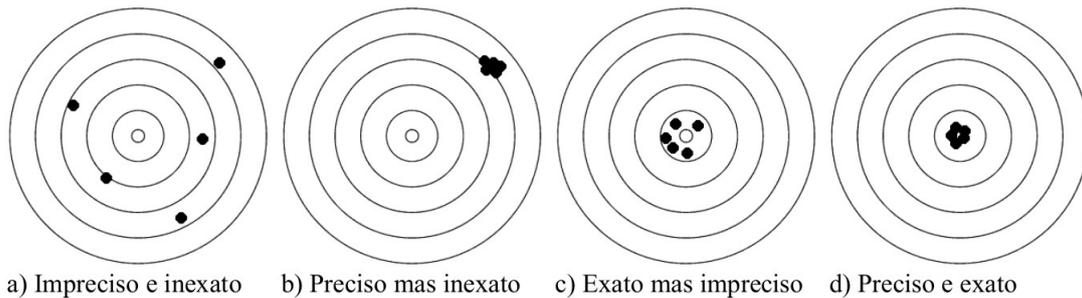


Figura B.2: Representação gráfica dos conceitos de precisão e exatidão.

Podemos estimar quantitativamente a precisão de uma medida w , que possui uma incerteza S_w , através da expressão:

$$\left| \frac{S_w}{w} \right| \cdot 100\% \quad (\text{B.29})$$

Quanto mais baixo o valor obtido com a Equação B.29, maior a precisão da medida.

Se um parâmetro w possui um valor de referência w_{ref} , mas experimentalmente foi obtido o valor w_{exp} , a exatidão da medida pode ser obtida pela expressão:

$$\left| \frac{w_{ref} - w_{exp}}{w_{ref}} \right| \cdot 100\% \quad (\text{B.30})$$

De um modo geral, podemos utilizar as Equações B.29 e B.30 em conjunto com a incerteza de uma determinada medida para dizermos se a mesma foi boa ou ruim.

B.6. Algarismos Significativos e arredondamentos (Regras)

1. Os erros das medidas são representados sempre com um algarismo significativo. Exceto quando o algarismo significativo for os números 1 ou 2, utilizamos dois algarismos significativos.
2. Primeiro obtemos o valor do erro para depois obter a posição do último algarismo significativo do valor principal.
3. O valor principal deve sempre ter seu último algarismo significativo na mesma casa do último algarismo significativo do erro.
4. O valor principal e o seu erro devem sempre estar na mesma potência.
5. Os erros lidos diretamente nos instrumentos, ou fornecidos pelo fabricante, são escritos apenas com um algarismo significativo, exceto se vier com 2 algarismos escritos no instrumento.
6. Para arredondamento: de 0,000 até 0,499 mantém-se o último algarismo significativo. De 0,500 até 0,999 acrescentamos uma unidade ao último algarismo significativo.

7. O número zero colocado à esquerda do valor principal ou do erro não é algarismo significativo, mas colocado à direita é um algarismo significativo do número.

8. Para o efeito de cálculo, trabalhamos com todos os números disponíveis no instrumento, mas a representação final sempre deve obedecer às regras acima.

B.7. Propagação de erros em um cálculo matemático

Quando obtemos qualquer medida experimental, sempre teremos o envolvimento do erro da medida. Ao realizarmos cálculo com essas medidas haverá uma propagação destes erros e o resultado também deve ser representado com um erro. Se tivermos duas medidas do tipo, $x \pm \Delta x$, e $y \pm \Delta y$, e realizarmos uma operação matemática qualquer, o resultante $f(x, y)$ também terá um erro $\Delta f(x, y)$. O valor do erro $\Delta f(x, y)$ pode ser obtido pela expressão:

$$\Delta f(x, y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot (\Delta y)^2} \quad (\text{B.31})$$

onde $\partial f / \partial z$ é a derivada parcial da função f com relação à variável z (z corresponde a x ou y , na Equação B.31).

Para um cálculo rápido e simplificado, apresentamos na Tabela B.3 uma lista de fórmulas para operações mais comuns

Tabela B.3: Exemplos de expressões para cálculos de propagação de erros

$w = w(x, y, z, \dots)$	Expressão para a incerteza σ_w
$w = x \pm y \pm z \pm \dots$	$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \dots$
$w = x^m$	$\sigma_w = mx^{m-1} \sigma_x$ ou $\left \frac{\sigma_w}{w} \right = \left m \frac{\sigma_x}{x} \right $
$w = ax$	$\sigma_w = a \sigma_x$ ou $\left \frac{\sigma_w}{w} \right = \left \frac{\sigma_x}{x} \right $
$w = ax \pm b$	$\sigma_w = a \sigma_x$ ou $\left \frac{\sigma_w}{w} \right = \left \frac{\sigma_x}{x} \right $
$w = axy$	$\sigma_w^2 = (ay)^2 \sigma_x^2 + (ax)^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_w}{w} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y} \right)^2$
$w = a \frac{x}{y}$	$\sigma_w^2 = \left(\frac{a}{y} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(a \frac{x}{y^2} \right)^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_w}{w} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y} \right)^2$
$w = ax^p y^q$	$\sigma_w^2 = (apx^{p-1} y^q)^2 \sigma_x^2 + (ax^p qy^{q-1})^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_w}{w} \right)^2 = \left(p \frac{\sigma_x}{x} \right)^2 + \left(q \frac{\sigma_y}{y} \right)^2$
$w = a \operatorname{sen}(bx)$	$\sigma_w = ab \cos(bx) \sigma_x$ – com bx e $b\sigma_x$ em radianos
$w = a \log_a(x)$	$\sigma_w = \left \frac{b}{\log_a(x)} \right \frac{\sigma_x}{x}$