Q1 -Mecânica (10 pontos)

Uma criança de massa m está sentada em um balanço suspenso por uma longa haste rígida de comprimento L. O pai dela exerce uma força horizontal $F(t) = f_0 \cos(\omega t)$ que excita o balanço e faz com que a criança descreva um movimento oscilatório. Considere que a aceleração local da gravidade seja igual a g e que a resistência do ar possa ser modelada como uma força de resistência de mesma direção e sentido oposto a velocidade da criança, com módulo dado por $F_{ar} = bv$.

Considerando válida a aproximação de pequenas oscilações, determine:

a) a equação de movimento para o ângulo de inclinação $\theta(t)$ da haste do balanço com respeito à direção vertical.

Gabarito: Segunda lei de Newton para rotações

$$\tau = I\theta''$$

$$F(t)L - bL^2\theta' - mgL\theta = I\theta''$$

$$\theta'' + \frac{b}{m}\theta' + \frac{g}{L}\theta = \frac{F(t)}{mL}. \tag{1}$$

Substituindo $F(t) = f_0 \cos(\omega t)$, chegamos a equação de movimento desejada

$$\theta'' + \frac{b}{m}\theta' + \frac{g}{L}\theta = \frac{f_0 \cos(\omega t)}{mL}. \tag{2}$$

Marking Scheme:
- + 3/3 Pontos por acertar a Equação de Movimento (Erros de sinal perdem 1 ponto por erro mas não propagam)
- Erros de aritmética levam penalidade de 0.5 mas não propagam exceto se gerarem um erro obvio de ser corrigido(unidades erradas por exemplo).
- Erros na parte (a) (além de aritmética e sinal) zeram a questão. Erros de unidade perdem 1 ponto.

b) a frequência angular ω que resulta na máxima amplitude de movimento da criança?

Gabarito: A condição de máxima amplitude da oscilação pode ser determinada investigando a solução particular complexa $\tilde{\theta}(t) = \theta_0 e^{i\omega t}$. Por simplicidade, considere um termo forçando $\tilde{f}(t) = f_0 e^{i\omega t}$, tal que a solução do sistema físico possa ser obtido a partir da parte real da solução complexa. Dessa maneira, temos

$$-\omega^2\theta_0 + i\omega\frac{b}{m}\theta_0 + \frac{g}{L}\theta_0 =$$

$$\theta_0 = \frac{f_0}{mL\left(\frac{g}{L} - \omega^2 + i\frac{b\omega}{m}\right)},$$

cuja amplitude é dada por

$$\theta_0 = \frac{f_0}{mL\sqrt{\left(\frac{g}{L} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}. \tag{3}$$

A condição de amplitude máxima é obtida quando a quantidade $\Lambda(\omega) = \left(\frac{g}{L} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2$ é mínima. Derivando $\Lambda(\omega)$ e igualando a zero, segue que

$$2(\frac{g}{L} - \omega^2)(-2\omega) + 2\frac{b^2\omega}{m^2} = 0$$

$$\omega_{opt} = \sqrt{\frac{g}{L} - \frac{b^2}{2m^2}}. \tag{4}$$

Marking Scheme:

- + 2 Pontos por propor uma maneira coerente de achar a amplitude de oscilação(resolver a eq. diferencial com números complexos, ou qualquer outro método).
- + 2 Pontos por desenvolver as contas do método acima obtendo o resultado correto.
- + 3 Pontos por derivar a amplitude com relação a ω e achar a amplitude máxima
- Erros de aritmética levam penalidade de 0.5 mas não propagam exceto se gerarem um erro obvio de ser corrigido(unidades erradas por exemplo). Erros de unidade obvios perdem -1 pontos por resposta.

Q2 - Termodinâmica (10 pontos)

Um físico passará o inverno isolado dentro de casa e projetará um sistema de aquecimento para garantir o seu conforto. O sistema visa manter a temperatura no interior de uma casa em $T_C = 278K$, enquanto a temperatura média do ambiente externo é de $T_F = 263K$. O sistema dispõe de uma lareira que pode servir como um reservatório térmico de temperatura $T_Q = 600K$. Objetiva-se transferir uma quantidade de calor ΔQ para dentro de sua casa com o menor custo energético possível.

Assumindo que o calor possa ser transferido da lareira tanto para o exterior da casa quanto o interior da casa, qual a menor quantidade de calor que precisa ser retirada da lareira $-\Delta Q'$ para que ele consiga injetar calor ΔQ no interior da casa?

Gabarito:

Nessa questão desejamos injetar uma quantia ΔQ de calor na nossa casa através de retirar uma quantia de calor $-\Delta Q_L$ da lareira. Claramente, podemos simplesmente retirar ΔQ da lareira e diretamente injetar na nossa casa, obtendo assim que $-\Delta Q_L = \Delta Q$. No entanto, é possivel encontrar uma solução mais eficiente, e encontraremos o menor valor de $-\Delta Q_L$ que precisa ser retirado para esquentar nossa casa por ΔQ.
Para encontrar isso, considere um processo termodinamico entre os tres reservatorios. Naturalmente, para maximizar eficiencia demandamos que a variação de entropia é $\Delta S = 0$, e por conservação de calor temos que:

$$\frac{\Delta Q}{T_C} + \frac{(\Delta Q_L)}{T_Q} + \frac{\Delta Q_F}{T_F} = 0 \tag{5}$$

$$\Delta Q + \Delta Q_L + \Delta Q_F = 0 \tag{6}$$

Onde ΔQ_F é o calor transferido pelo reservatorio frio. Resolvendo este sistema de equações para ΔQ_L em função de ΔQ, obtemos para $-\Delta Q_L$:

$$-\Delta Q_L = \Delta Q \frac{T_Q(T_C - T_F)}{T_C(T_Q - T_F)} \approx 0.096\Delta Q \tag{7}$$

Que incredulamente, é muito menos calor que o resultado original de $1 \cdot \Delta Q$.

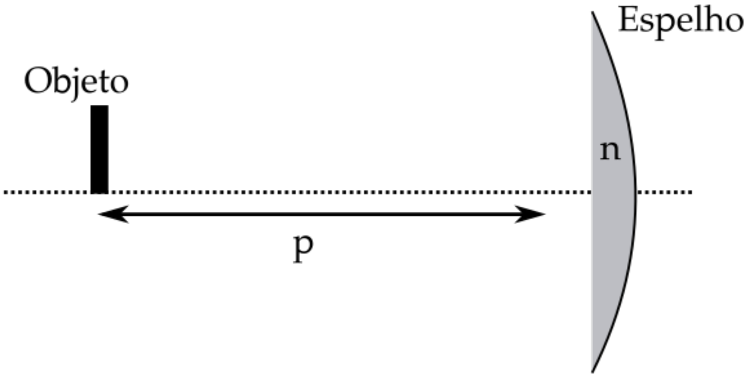
Marking Scheme:

- + 3 Pontos se referenciou que optimamente esperiariamos variacao de entropia 0
- + 4 Pontos caso argumentou coerentemente como construir um processo termodinamico que injetasse calor suficiente na casa/ ou argumentou uma solucao nao construtiva do problema
- + 3 Pontos se obteve o valor correto

Nota: Argumentos condizentes que tentam resolver o problema de outra maneira também são considerados - por exemplo por um método construtivo que tenta construir o processo termôdinamico descrito acima. Para essas soluções a nota será atribúida com base no progresso em construir um processo termôdinamico *não trivial.* Note que apenas referenciar o processo de Carnot ou eficiencia máxima e construir um processo apenas com base nisso constitui um processo trivial e não sera dado pontos.

Q3 - Óptica geométrica (10 pontos)

Um objeto situado sobre o eixo óptico de um espelho côncavo, a uma distância p do espelho, tem sua imagem projetada sobre um anteparo que dista L do espelho. Em um determinado instante, preenche-se parte da superfície refletora do espelho com um líquido de índice de refração n, e agora a imagem final do sistema se situa a uma distância kp do espelho, de forma que k é um número real positivo. Considerando que a superfície do líquido em contato com o ar é plana e que a espessura do volume ocupado pelo mesmo é desprezível em comparação com p, responda os seguintes itens:



a) Qual é o índice de refração n do líquido em questão? Dê sua resposta em função de k, p e L.

Inicialmente, sem o líquido, temos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{L} \tag{8}$$

Já com a adição do líquido, primeiro devemos considerar a refração na superfície do mesmo, gerando um objeto "aparente"para o espelho:

$$\frac{p_{ap}}{p} = n \rightarrow p_{ap} = np \tag{9}$$

De forma que a imagem gerada pelo espelho agora é posicionada em p':

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{np} + \frac{1}{p'} \tag{10}$$

Mas de 8, temos:

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{L} - \frac{1}{np} \rightarrow p' = \frac{pnL}{(n-1)L + np} \tag{11}$$

Entretanto, após ocorrer uma nova refração na interface líquido-ar, finalmente temos a imagem final do sistema, tal que:

$$\frac{p'_{ap}}{p'} = \frac{1}{n} \tag{12}$$

Como o enunciado diz que $p'_{ap} = kp$, e substituindo p', acabamos em:

$$n = \frac{k+1}{k}\frac{L}{p+L} \tag{13}$$

Marking Scheme (6 pontos):

- Encontrar a posição aparente do objeto (1,5).
- Achar a posição da imagem gerada pelo espelho, encontrando a distância focal com a situação dada inicialmente (2,5). Observação: foi dado 0,5 se o estudante escreveu a distância focal do espelho em função de p e L.
- Relacionar a posição da imagem final (kp) com a posição da imagem conjugada pelo espelho (1,5).
- Encontrar o valor correto de n (0,5).

b) Considere que uma lente delgada biconvexa foi posicionada a uma distância d à frente do anteparo, de forma que a imagem final do sistema volta a ser projetada sobre ele. Supondo que ambas as superfícies da lente tenha raio de curvatura R, qual deve ser o índice de refração n_l do material que compõe a lente? Dê sua resposta em função de k, p, L, d e R.

Considerando que a distância focal da lente é f', temos:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{L-kp-d} + \frac{1}{d} \rightarrow \frac{1}{f'} = \frac{L-kp}{d(L-kp-d)} \tag{14}$$

Por outro lado:

$$\frac{1}{f'} = (n_l - 1)\frac{2}{R} \tag{15}$$

Com essas duas equações, chegamos em:

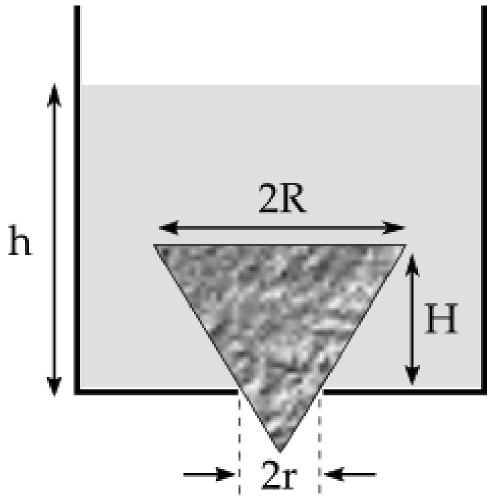
$$n_l = 1 + \frac{R(L-kp)}{2d(L-kp-d)} \tag{16}$$

Marking Scheme (4 pontos):

- Encontrar a distância focal da lente em função das distâncias dadas no enunciado (1,5).
- Montar a equação dos fabricantes de lente (1,0) + encontrar n_l em função de f' e R (1,0).
- Achar o valor correto de n_l (0,5).

Q4 - Mecânica de fluidos (10 pontos)

Considere um tanque preenchido com um líquido de densidade ρ_l até uma altura h e com um furo de raio r no fundo. O furo é tampado com um cone homogêneo, de raio de base $R > r$ e a altura da parte submersa é H, com sua base plana voltada para cima.



Faça o que se pede nos itens a seguir.

a) Determine a densidade crítica do cone, ρ_c, para a qual ele se encontra na iminência de perder o contato com o fundo do tanque. Dê sua resposta em função de ρ_l, R, r, H e h.

A força que o líquido exerce sobre o cone é dada por:

$$F = \rho_l g V_{tronco} - \rho_l g h \pi r^2 \rightarrow F = \rho_l \pi g[\frac{H(R^3 - r^3)}{3(R-r)} - hr^2] \tag{17}$$

O cone perde o contato quando $F = Mg$, logo:

$$M = \rho_l \pi[\frac{H(R^3 - r^3)}{3(R-r)} - hr^2] \rightarrow \rho_l = \frac{3M(R-r)}{\pi[H(R^3 - r^3) - 3(R-r)hr^2]} \tag{18}$$

Por outro lado, como $M = \rho_c V$ e o volume do cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^3 \frac{H}{R-r} \tag{19}$$

Temos:

$$\rho_c = \frac{[H(R^3 - r^3) - 3(R-r)hr^2]}{HR^3}\rho_l \tag{20}$$

Portanto:

$$\rho_c = \rho_l(1 - \frac{3h}{H}\frac{r^2}{R^2} + (\frac{3h}{H} - 1)\frac{r^3}{R^3}) \tag{21}$$

Marking Scheme (6 pontos):

- Encontrar o volume do tronco de cone (1,0).
- Calcular corretamente o termo associado ao empuxo na força que o líquido exerce sobre o cone (1,5).
- Descontar o termo devido à ausência de empuxo na extremidade inferior do tronco (1,5).
- Igualar a força obtida com o peso (1,0).
- Calcular o volume do cone e, consequentemente, ρ_c (1,0). Será descontado 0,5 se o valor encontrado para ρ_c estiver incorreto.

b) Suponha neste item que o nível de líquido é mantido fixo em $H = h$, isto é, quando a base do cone fica no mesmo nível da superfície livre do líquido. Esboce o gráfico da razão entre a densidade crítica ρ_c para a qual o cone perde contato com o fundo do tanque e da densidade do líquido, $\frac{\rho_c}{\rho_l}$, pelo parâmetro geométrico $k = r/R$, $k \in (0, 1)$. Comente o resultado obtido.

Fazendo as substituições $r = kR$ e $H = h$, temos:

$$\rho_c = \rho_l(1 - 3\frac{k^2R^2}{R^2} + (3-1)\frac{k^3R^3}{R^3}) \tag{22}$$

Temos então:

$$\frac{\rho_c}{\rho_l} = 2k^3 - 3k^2 + 1 \tag{23}$$

Cujo perfil da curva pode ser observado na figura a seguir.
Vale ressaltar que a razão decresce monotonicamente no intervalo considerado, e como o valor máximo dela é 1, sempre teremos $\rho_c < \rho_l$. Destaca-se que $k = 0$ corresponde à situação em que o cone está inteiramente imerso no líquido, o que significa que a densidade crítica do cone deve ser igual a do líquido, como era esperado. Conforme k tende a 1, a densidade crítica tende a 0, implicando que, no limite, não há material tal que o cone perca contato com o fundo do recipiente (no caso, sua base estaria no nível do fundo do recipiente).

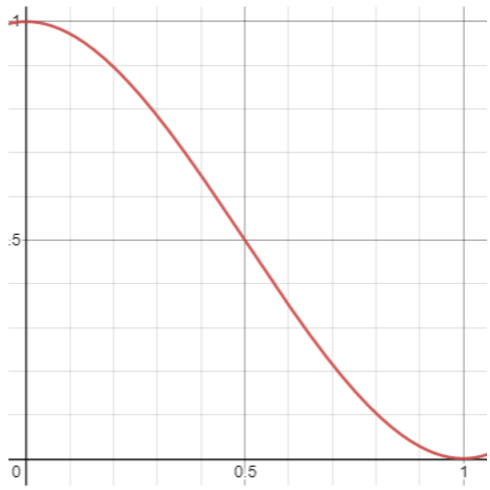


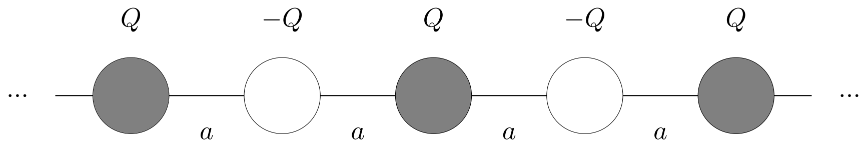
Figura 1: Gráfico da função $\frac{\rho_c}{\rho_l} = 2k^3 - 3k^2 + 1$
.

Marking Scheme (4 pontos):

- Encontrar a razão $\frac{\rho_c}{\rho_l}$ em função de k (0,5).
- Esboçar o gráfico (2,5).
- Comentar o comportamento observado (1,0). Observação: em função de minimizar o efeito de erros cometidos no item a na avaliação do item b, será considerado 50% da pontuação do item b caso o estudante encontre uma expressão para a razão que tenha significado físico (razão ≤ 1 e derivada ≤ 0 em todo intervalo pedido de k), esboce o gráfico e mencione esse comportamento no seu comentário.

Q5 - Eletricidade (10 pontos)

Considere uma distribuição linear de $N \gg 1$ cargas elétricas puntiformes de valores $+Q$ e $-Q$ alternadas. As cargas são distribuídas de tal forma que a distância entre duas cargas vizinhas é dada por a, como ilustra a figura a seguir. Esse é um modelo simplificado unidimensional de um cristal iônico, como o sal de cozinha (NaCl).



A permissividade elétrica do meio é dada por ε_0. Faça o que se pede nos itens a seguir.

a) Calcule o potencial elétrico V_{lat} gerado em um sítio ocupado por uma carga Q, devido às demais cargas.

O potencial elétrico solicitado é dado por, no sítio de uma carga positiva:

$$V_{lat} = -\frac{2KQ}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}. \tag{24}$$

O somatório pode ser determinado através de uma expansão de Taylor da função $\ln(x)$ em torno de $x = 1$. Dessa maneira, deduz-se a expressão

$$\ln(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + ... \tag{25}$$

Segue, portanto, substituindo $a = 1$ em 25,que

$$V_{lat} = -\frac{2KQ}{a}\ln(2). \tag{26}$$

b) Calcule a energia eletrostática por sítio, U_E/N,da distribuição de cargas. Caso não consiga resolver o item anterior, deixe sua resposta em função de V_{lat}.

A energia eletrostática total do sistema pode ser escrita como

$$U_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i.V_{lat} = -\frac{KQ^2N}{a}\ln(2) \tag{27}$$

$$\frac{U_E}{N} = -\frac{KQ^2}{a}\ln(2) \tag{28}$$

Note que embora V_{lat} dependa do sinal da carga, o produto $Q_iV_{lat,i}$ sempre tem o mesmo sinal, e portanto o somatório acima é bem definido. Note também que quando $N >> 1$, o sistema possui simetria translacional, e por isso o somatório é simplesmente uma multiplicação por N. Obviamente, essa simetria não vale perto das bordas do sistema, mas esse efeito é suprimido por um fator de $1/N$ no limite termodinâmico.

Marking Scheme:

- Escrever a expressão para o potencial elétrico corretamente (+3, esquecer o fator de 2 rende somente +1)
- Simplificar o somatório para $ln(2)$ (+4, falar que diverge rende 0, separar em positivo - negativo rende 0, deixar a serie não computada rende 0).
- Escrever a expressão correta para a energia total ou U/N (+3, esquecer o fator de 1/2 na energia por sitio rende somente +1, respostas que não fazem sentido no limite termodinâmico rendem 0 pontos).
- Erros não serão propagados, a não ser os absurdos, o que fica a critério do corretor.

.

Q6 - Magnetismo (10 pontos)

Considere uma partícula de carga q e massa m se movendo em uma região na qual existe um campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$ e um campo elétrico $\vec{E} = E\hat{y}$. O movimento da partícula é restrito ao plano xy. Seja $\vec{r}_0 = x(0)\hat{x} + y(0)\hat{y}$ a posição inicial da partícula e $\vec{v}_0 = v_x(0)\hat{x} + v_y(0)\hat{y}$ sua velocidade inicial, ambas tomadas no instante $t = 0$.

a) Determine um sistema de equações que deve ser satisfeito por $v_x(t)$, $v_y(t)$ e suas derivadas.

A segunda lei de Newton para a partícula pode ser escrita como:

$$m\ddot{\vec{r}} = qE\hat{y} + qB\dot{\vec{r}} \times \hat{z} \tag{29}$$

As equações diferenciais para $x(t)$ e $y(t)$ são, respectivamente, em termos de ω_c:

$$\ddot{x} = \omega_c\dot{y} \tag{30}$$

$$\ddot{y} = -\omega_c(\dot{x} - \frac{E}{B}) \tag{31}$$

Para "desacoplar"essas equações, considere $v_x = \dot{x}$ e $v_y = \dot{y}$, tal que as equações 30 e 31 podem ser reescritas, depois de derivar a equação 30 mais uma vez em relação ao tempo, como:

$$\ddot{v}_x = \omega_c\dot{v}_y \tag{32}$$

$$\dot{v}_y = -\omega_c(v_x - \frac{E}{B}) \tag{33}$$

b) Encontre a solução geral das equações de movimento da partícula $x(t)$ e $y(t)$. Sua resposta pode ficar em função da frequência de cíclotron $\omega_c = \frac{qB}{m}$ e condições iniciais.

Daí, temos:

$$\ddot{v}_x + \omega_c^2 v_x = \omega_c^2\frac{E}{B} \tag{34}$$

Logo, a solução geral para $v_x(t)$ é:

$$v_x(t) = C_1cos(\omega_c t) + C_2sen(\omega_c t) + \frac{E}{B} \tag{35}$$

Da mesma forma, para $v_y(t)$, temos:

$$v_y(t) = -C_1sen(\omega_c t) + C_2cos(\omega_c t) \tag{36}$$

Integrando as duas últimas equações mais uma vez, chegamos em:

$$x(t) = \frac{C_1}{\omega_c}sen(\omega_c t) - \frac{C_2}{\omega_c}cos(\omega_c t) + \frac{E}{B}t + C_x \tag{37}$$

$$y(t) = \frac{C_1}{\omega_c}cos(\omega_c t) + \frac{C_2}{\omega_c}sen(\omega_c t) + C_y \tag{38}$$

De forma que C_1, C_2, C_x e C_y são constantes determinadas a partir das condições iniciais.

c) Assumindo que as condições iniciais são $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \frac{E}{B} - A$, $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$, qual deve ser o valor de A tal que a trajetória resultante da partícula seja uma cicloide? [1]

[1] A cicloide é uma curva correspondente a trajetória de um ponto na borda de um disco que rola sem deslizar sobre um plano.

As 4 condições iniciais geram as seguintes relações, respectivamente:

$$0 = -\frac{C_2}{\omega_c} + C_x \tag{39}$$

$$\frac{E}{B} - A = C_1 + \frac{E}{B} \rightarrow A = -C_1 \tag{40}$$

$$0 = \frac{C_1}{\omega_c} + C_y \tag{41}$$

$$0 = C_2 \tag{42}$$

Ou seja, temos $C_2 = C_x = 0$, $C_1 = -A$ e $C_y = \frac{A}{\omega_c}$. Daí, as equações horárias ficam:

$$x(t) = \frac{A}{\omega_c}(\frac{E}{BA}\omega_c t - sen(\omega_c t)) \tag{43}$$

$$y(t) = \frac{A}{\omega_c}(1 - cos(\omega_c t)) \tag{44}$$

Para que $x(t)$ siga o formato esperado para a ciclóide, temos $\frac{E}{BA} = 1$, isto é, $A = \frac{E}{B}$.

Marking Scheme:

- Escrever a segunda lei de Newton corretamente (+2, se houver erro rende 0 nesse item).
- Separar a equação vetorial em componentes x e y e exprimir tudo em função apenas das velocidades e suas derivadas (+1)
- Desacoplar as equações diferenciais (+2)
- Escrever as soluções gerais (+2, se faltar termos +1)
- Usar as condições iniciais corretamente (+2)
- Concluir corretamente com condição para a trajetória ser uma cicloide (+1)
- Soluções que começam com a lei de Newton escrita errada podem ganhar pontos caso as equações de movimento como apresentadas possuam algum sentido físico, o que fica a critério do corretor.

.