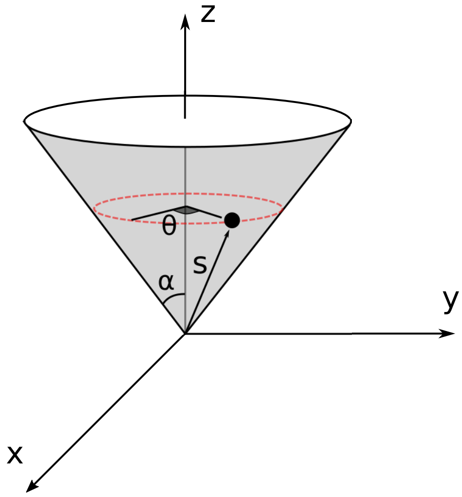
Q1 -Cinemática (10 pontos)

Uma partícula puntiforme é livre para movimentar-se ao longo de um cone como o ilustrado na figura a seguir. O ângulo de abertura do cone é dado por α. A posição da partícula é descrita em termos da distância s entre o vértice do cone e a partícula e pelo ângulo θ, definido como ângulo de abertura entre a direção $\hat{x}$ e a posição da partícula com respeito ao centro de uma circunferência horizontal (veja a linha tracejada na figura).



A respeito desse sistema físico, determine:

a) As componente do vetor posição $\vec{r} = (x, y, z)$, em coordenadas carteasianas, em termos de s e θ.

b) As três componentes, em coordenadas carteasianas, do vetor aceleração (a_x, a_y e a_z), em termos de s, θ, $\dot{s}$, $\dot{\theta}$, $\ddot{s}$ e $\ddot{\theta}$.

Gabarito:
a) Da geometria do sistema, segue que

$$\vec{r} = (s \text{ sen}\alpha \cos\theta, s \text{ sen}\alpha \text{ sen}\theta, s\cos\alpha).$$

b) A aceleração pode ser obtida derivando o vetor posição duas vezes com respeito ao tempo. A primeira derivada temporal resulta na velocidade:

$$\vec{v} = (\dot{s} \text{ sen}\alpha \cos\theta - s \text{ sen}\alpha \text{ sen}\theta\ \dot{\theta}, \dot{s} \text{ sen}\alpha \text{ sen}\theta + s \text{ sen}\alpha \cos\theta\ \dot{\theta}, \dot{s}\cos\alpha),$$

que, derivada novamente resulta na expressão das componentes desejadas da aceleração:

$$a_x = \ddot{s} \text{ sen}\alpha \cos\theta - 2\dot{s} \text{ sen}\alpha \text{ sen}\theta\dot{\theta} - s \text{ sen}\alpha \cos\theta\dot{\theta}^2 - s \text{ sen}\alpha \text{ sen}\theta\ddot{\theta}$$

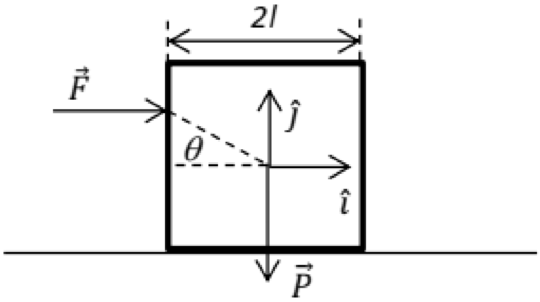
$$a_y = \ddot{s} \text{ sen}\alpha \text{ sen}\theta + 2\dot{s} \text{ sen}\alpha \cos\theta\dot{\theta} - s \text{ sen}\alpha \text{ sen}\theta\dot{\theta}^2 + s \text{ sen}\alpha \cos\theta\ddot{\theta}$$

$$a_z = \ddot{s}\cos\alpha$$

Q2 - Dinâmica (10 pontos)

Apresentamos a seguir um modelo mecânico para estudar as forças aplicadas sobre um sistema que mantém o equilíbrio estático. Não levaremos em conta detalhes microscópicos.

Considere um bloco cúbico rígido de peso $\vec{P} = P(-\hat{j})$ e lado $2l$, que descansa sobre uma superfície horizontal rugosa e rígida, sobre a qual se aplica uma força $\vec{F} = F(\hat{\imath})$ cujo módulo é menor que a força de atrito estático máxima μ_sN (ver figura abaixo).

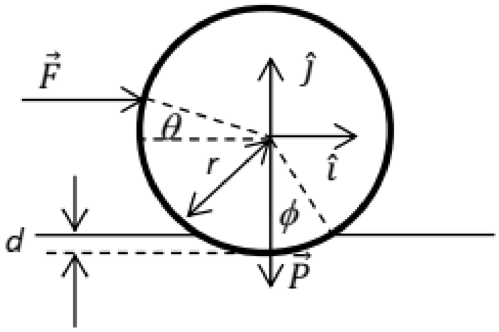


Em função dos módulos de $\vec{F}$, $\vec{P}$ e do ângulo θ, existe uma força de reação $\vec{R}$ aplicada em um ponto x, $0 \leq x \leq 2l$, de contato entre a superfície e o bloco, que garante o equilíbrio do sistema. Considere a força $\vec{F}$ aplicada no ponto y tal que $0 \leq y \leq 2l$.

a) Encontre uma expressão para x em função de F, P, l e θ.

b) Qual é o intervalo válido ($x_{min} \leq x \leq x_{max}$) para a posição do ponto de aplicação da força R? Analise os possíveis valores que pode assumir a força F.

Suponha agora que ao invés do sistema anterior, temos uma esfera maciça rígida, de raio r, sobre uma superfície rugosa "não tão rígida", ou seja, que pode sofrer deformação (ver figura abaixo). Essa é situação mais próxima à realidade.



Nesta situação, a força de reação da superfície, $\vec{R}$, é aplicada em um ponto do arco compreendido entre $\phi = 0$ e $\phi = \phi_{max}$, dependendo de F, P e θ. Considere a situação em que $\vec{R}$ se aplica em ϕ_{max}.

c) Encontre uma equação que relacione o ângulo θ e a deformação da superfície, d, em função das forças F e P e o raio r da esfera.

Gabarito:

a) Considerando que a força $\vec{R}$ está aplicada em um ponto a uma distância x da vertical que passa pelo centro do cubo, da condição de equilíbrio da translação

$$R_x = f_{at} = F \tag{1}$$

$$R_y = N = P. \tag{2}$$

Da condição de equilíbrio na rotação em relação ao centro do cubo

$$Nx = Px = Fl\tan\theta + f_{at}l = Fl\tan\theta + Fl = Fl(\tan\theta + 1). \tag{3}$$

Daí,

$$x = \frac{F}{P}l(\tan\theta + 1). \tag{4}$$

b)

$$-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4 \tag{5}$$

$$x(\pi/4) = \frac{2F}{P}l = x_{max} \tag{6}$$

$$x(-\pi/4) = 0 = x_{min} \tag{7}$$

c) Da geometria do problema,

$$d = r(1 - \cos\phi) \tag{8}$$

$$F = R_x \tag{9}$$

$$P = R_y. \tag{10}$$

Com a força $\vec{R}$ aplicada em ϕ_{max}, do equilíbrio de torques

$$R_x r\cos\phi + Fr\sin\theta = R_y r\sin\phi. \tag{11}$$

Usando as equações 9 e 10,

$$Fr\cos\phi + Fr\sin\theta = Pr\sin\phi. \tag{12}$$

Daí,

$$P\sin\phi - F\cos\phi = F\sin\theta = P\sqrt{1-\cos^2\phi} - F\cos\phi. \tag{13}$$

Após um pouco de álgebra,

$$\cos^2\phi(1 + \frac{P^2}{F^2}) + 2\sin\theta\cos\phi + (\sin^2\theta - \frac{P^2}{F^2}) = 0. \tag{14}$$

Da equação 8,

$$\cos\phi = 1 - \frac{d}{r}. \tag{15}$$

Assim, a equação que relaciona o ângulo θ e d, em função de F, P e r é dada por

$$(1 - \frac{d}{r})^2(1 + \frac{P^2}{F^2}) + 2\sin\theta(1 - \frac{d}{r}) + (\sin^2\theta - \frac{P^2}{F^2}) = 0. \tag{16}$$

Q3 - Termodinâmica (10 pontos)

Considere um sistema físico de massa m cuja energia interna é dada pela expressão

$$U(T) = R\frac{T_c}{e^{T_c/T} - 1}, \tag{17}$$

em que T_c representa uma temperatura crítica característica do sistema, R é a constante universal dos gases e T a sua temperatura.

a) Calcule a expressão do calor específico do material $c(T)$ à temperatura T.

b) Determine os valores limites quando $T \ll T_c$ e $T \gg T_c$.

c) Calcule a quantidade de calor que precisa ser fornecida ao sistema para aquecê-lo desde a temperatura T_c até a temperatura $2T_c$. Considere que a variação de volume do material é desprezível.

Gabarito:
a) Definição de calor específico de um material

$$c(T) = \frac{1}{m}\frac{dU}{dT} = R\left(\frac{T_c}{T}\right)^2 \frac{e^{T_c/T}}{m\left(e^{T_c/T} - 1\right)^2}.$$

b) Reescrevendo a expressão de $c(T)$ em termos de $u = T_c/T$, temos que

$$c(T) = \frac{Ru^2e^u}{m\left(e^u - 1\right)^2}.$$

- Quando $u \to \infty$ ($T_c \gg T$):
$$\lim_{u\to\infty} c(u) = \lim_{u\to\infty} Ru^2e^{-u}/m = 0.$$

- Quando $u \to 0$ ($T_c \ll T$):

  Podemos usar a aproximação $e^u \approx 1 + u$, que nos leva ao resultado

$$c(T) \approx R/m.$$

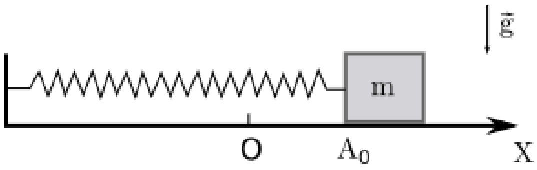
c) Da primeira lei da termodinâmica, tem-se que $Q = \Delta U + W$. O trabalho pode ser desprezado uma vez que a variação de volume é constante. Portanto,

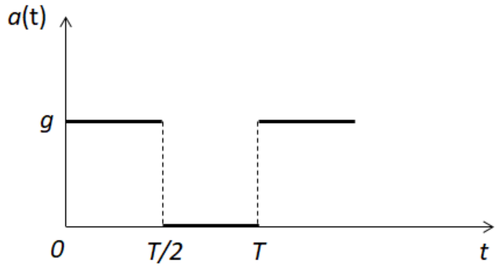
$$Q = \Delta U = U(2T_c) - U(T_c) = RT\frac{e^{1/2}}{e - 1}.$$

Q4 - Oscilações (10 pontos)

Considere um corpo sólido de massa M sobre uma superfície horizontal rugosa OX, de coeficiente de atrito μ, conectado a uma parede através de uma mola de constante elástica k (ver figura).

Todo o sistema se encontra dentro de um elevador que pode se mover na vertical. Considere o elevador se movendo para baixo com aceleração também para baixo, cujo valor varia com o tempo com respeito ao referencial do chão. O valor da aceleração do elevador corresponde a uma função "de pulso quadrado" como mostrado na figura abaixo.





O valor T indicado é o período de oscilação do sistema massa-mola que se encontra dentro do elevador e g é a aceleração da gravidade. A posição de alongamento nulo da mola é $x = 0$ e os coeficientes de atrito estático e cinético podem ser considerados iguais a μ. Inicialmente o corpo se encontra em repouso na posição $A_0 > \mu \dfrac{Mg}{k}$.

a) Escreva a equação do movimento, para qualquer instante de tempo, do sistema anterior.

b) Faça uma análise do balanço energético do sistema e desenhe o gráfico (x, v) correspondente à primeira oscilação.

c) A partir do gráfico anterior, encontre o decrescimento do desvio máximo do oscilador no sentido positivo do eixo x, ΔA, durante uma oscilação. Que tempo transcorre entre esses dois primeiros desvios máximos?

Gabarito:

a) Ao ser solto, o sistema começa a se mover ao longo do eixo x. No sistema de referência do elevador, durante os intervalos de tempo em que o elevador é acelerado, no eixo y

$$Mg + N = Mg. \tag{18}$$

A normal é nula, o que significa que o corpo se move ao longo do eixo x sem atrito, realizando uma oscilação livre. Nos intervalos de tempo em que o elevador de move sem aceleração, o sistema realizará um movimento oscilatório amortecido pelo atrito μmg entre o corpo e a superfície. A equação do movimento na enésima oscilação:

- Para $0 + (n-1)T \leq t \leq T/2 + (n-1)T$:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0; \tag{19}$$

- Para $T/2 + (n-1)T \leq t \leq nT$:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + kx = -\mu Mg. \tag{20}$$

b) Para $0 \leq t \leq T/2$,

$$\frac{kA_0^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \tag{21}$$

Para $T/2 \leq t \leq T$,

$$W_{fat} = \Delta E \to -\mu Mg(x + A_0) = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} - \frac{kA_0^2}{2} \tag{22}$$

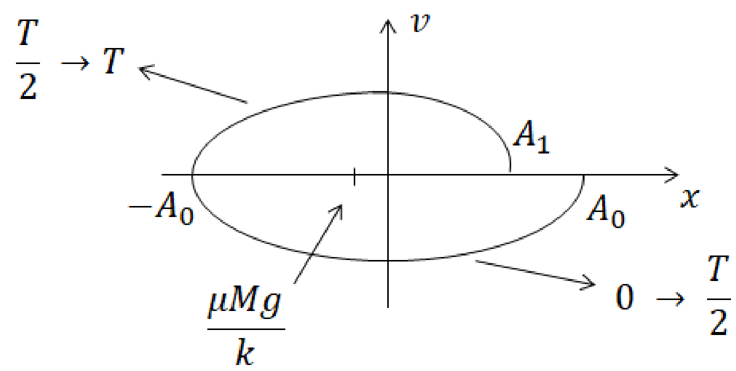
Da equação 21,

$$1 = \frac{x^2}{A_0^2} + \frac{v^2}{(k/M)A_0^2}. \tag{23}$$

A equação 23 é uma elipse centrada na origem. A partir da equação 22, depois de alguns trabalhos algébricos,

$$1 = \frac{(x + \frac{\mu Mg}{k})^2}{(A_0 - \frac{\mu Mg}{k})^2} + \frac{Mv^2 2}{(A_0 - \frac{\mu Mg}{k})^2}. \tag{24}$$

A equação 24 é uma elipse centrada em $(\frac{\mu Mg}{k}, 0)$ Fazendo o gráfico das duas elipses em um único sistema de eixos (x, v), chegamos à figura 1, mostrada a seguir.



c) Do gráfico das elipses,

$$\Delta A = A_0 - A_1 \tag{25}$$

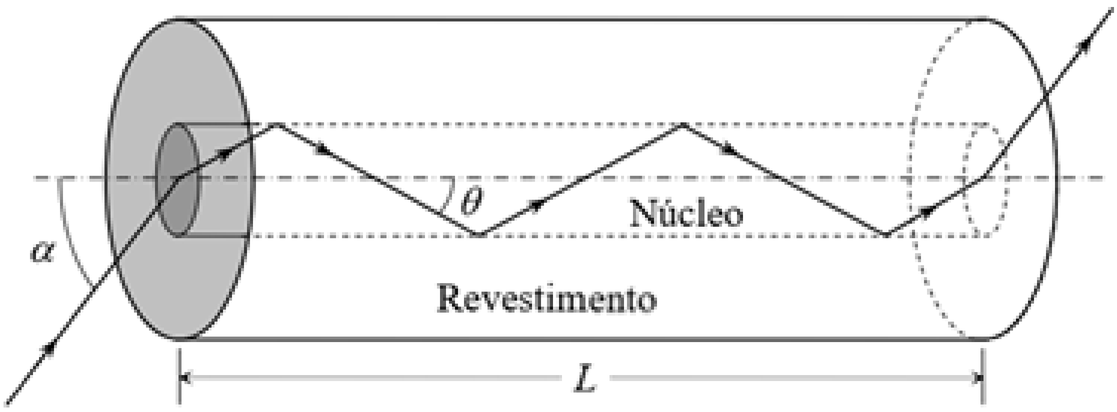
O semi-eixo da elipse superior é $a = A_0 - \frac{\mu Mg}{k}$

$$A_1 = 2a - A_0 = 2(A_0 - \frac{\mu Mg}{k}) - A_0 = A_0 - \frac{2\mu Mg}{k} \to \Delta A = \frac{2\mu Mg}{k}. \tag{26}$$

O tempo entre dois desvios máximos é justamente o período de oscilação do sistema porque a aceleração oscila com esse mesmo período $T = 2\pi\sqrt{M/k}$.

Q5 - Óptica (10 pontos)

As fibras ópticas tem revolucionado o mundo das telecomunicações nas últimas décadas. Seu funcionamento está baseado nas leis da reflexão e da refração, em particular, no fenômeno da refração total interna. Na figura abaixo mostramos o esquema de uma fibra óptica, a qual é um fino fio de material transparente, chamado núcleo, através do qual se propaga luz que sofre diversas reflexões totais, já que o material que "envolve" a fibra, chamado revestimento, possui um menor índice de refração.



Dados: $n_{ar} = 1,000$, $n_{nuc} = 1,4665$ e $n_{rev} = 1,460$.

a) Determine o máximo ângulo respeito ao eixo, θ_{max}, com que pode viajar a luz dentro do núcleo para que se produzam reflexões totais ao atingir o revestimento. Para que ângulo máximo externo de iluminação α_{max} esta situação acontece?

Todos os raios que incidem sobre a entrada do núcleo com $0 \leq \alpha \leq \alpha_{max}$ propagar-se-ão ao longo da fibra, confinados no núcleo. Os raios seguem caminhos diferentes e, portanto, tardam tempos diferentes até alcançar o extremo de saída.

b) Sabendo que a velocidade da luz no vácuo é $c = 2,998.10^8 m/s$, calcule os comprimentos L_0 e L_{max} percorridos pela luz nos casos extremos ($\alpha = 0$, $\alpha = \alpha_{max}$), assim como os tempos de trânsito correspondentes, t_0, t_{max}, para uma fibra de comprimento $L = 1000m$.

Gabarito:
a) Da condição de reflexão total interna,

$$\gamma_{crit} = \arcsin\left(\frac{n_{rev}}{n_{nuc}}\right) \approx 85,3^0.$$

O ângulo que queremos é β_{max}, que é complemento de γ_{crit}, então, $\beta_{max} + \gamma_{crit} = \pi/2$ Assim,

$$\beta_{max} = \pi/2 - 85,3^0 C \approx 4,7^0$$

O ângulo externo α_{max}

$$\sin\alpha_{max} = n_{nuc}\sin\beta_{max} = n_{nuc}\cos\gamma_{crit}$$

$$\alpha_{max} = \arcsin\big(1,465(\cos 4,7^0)\big) \approx 6,9^0.$$

b) Os raios que entram perpendicularmente ($\alpha = 0$), viajem paralelamente ao eixo da fibra,

$$L_0 = L = 1000m$$

Dentro da fibra, a velocidade da luz é $v = \frac{c}{n_{nuc}}$, então, para $\alpha = 0$,

$$t_0 = \frac{L}{v_0} = \frac{L}{\frac{c}{n_{nuc}}} = \frac{Ln_{nuc}}{c} \approx 4,887\mu s.$$

Se o ângulo de incidência é α_{max}, os raios viajarão dentro da fibra com β_{max}, então o comprimento percorrido será

$$L_{max} = \frac{L}{\cos\beta_{max}} = \frac{L}{\sin\gamma_{crit}} \approx 1003,4m.$$

O tempo

$$t_{max} = \frac{L_{max}}{v} = \frac{L_{max}n_{nuc}}{c} \approx 4,903\mu s.$$