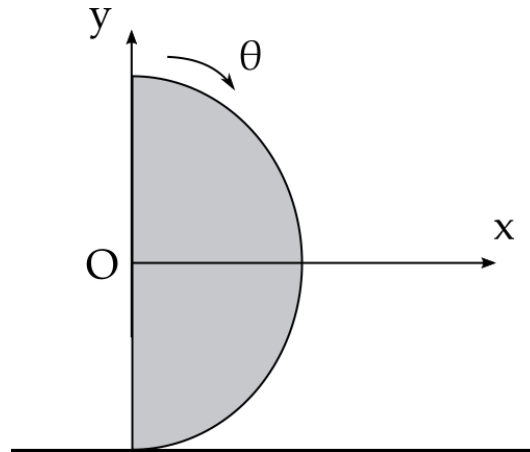


### Q1 -Rolamento de um semidisco (10 pontos)

Um semidisco homogêneo de massa  $M$  e raio  $R$  rola sem deslizar sobre uma superfície horizontal, mantendo-se num plano vertical. Denote por  $\theta$  o ângulo que o semidisco gira em torno do seu centro  $O$ , a partir da posição inicial ( $\theta = 0$ ) indicada na figura abaixo. Assuma o sistema de eixos cartesianos fixo no espaço indicado.



Em um instante genérico, com  $\theta \neq 0$ , a velocidade angular do semidisco é dada por  $\omega$  e sua aceleração angular por  $\alpha$ . Faça o que se pede nos itens a seguir.

- Determine uma expressão para o vetor que representa a força  $\vec{F}_c$  de contato do chão sobre o semidisco em termos de  $M$ ,  $g$ ,  $R$ ,  $\theta$  e suas derivadas temporais,  $\omega$  e  $\alpha$ .
- Determine o valor da aceleração angular  $\alpha$  em função de  $g$ ,  $R$ ,  $\theta$  e  $\omega$ .

**Dados:**

- O centro de massa de um semidisco encontra-se a uma distância  $d = 4R/3\pi$ , do ponto  $O$ .
- O momento de inércia de um semidisco de raio  $R$  e massa  $M$ , em relação do ponto  $O$ , é  $I_O = (MR^2)/2$ .

**Gabarito:**

Na posição do semidisco,  $Mg$  atua no ponto C (centro de massas), na direção vertical, para baixo.  $F_V$  atua no ponto de contato, na direção vertical, para cima.  $F_H$  atua no ponto de contato, na direção horizontal, para a direita.

Posição x do ponto C:

$$X_C = d \operatorname{sen} \theta$$

Posição y do ponto C:

$$Y_C = -d \operatorname{cos} \theta$$

(d é a distância do CM até o ponto O) Derivando duas vezes,

$$X_C'' = \frac{4R}{3\pi} (\operatorname{cos} \theta \theta'' - \operatorname{sen} \theta \theta'^2) \quad (1)$$

$$Y_C'' = -\frac{4R}{3\pi} (\operatorname{sen} \theta \theta'' + \operatorname{cos} \theta \theta'^2) \quad (2)$$

A aceleração angular é

$$\theta'' = \omega' = \alpha$$

Da segunda lei de Newton para a translação e rotação, usando as equações 1 e 2,

$$F_H = M X_C'' = M \left[ \frac{4R}{3\pi} (\operatorname{cos} \theta \theta'' - \operatorname{sen} \theta \theta'^2) \right] \quad (3)$$

$$F_V - Mg = M Y_C'' = -M \left[ \frac{4R}{3\pi} (\operatorname{sen} \theta \theta'' + \operatorname{cos} \theta \theta'^2) \right] \quad (4)$$

$$\vec{F}_R = M \left[ \frac{4R}{3\pi} (\operatorname{cos} \theta \theta'' - \operatorname{sen} \theta \theta'^2) \right] \vec{i} + (-M \left[ \frac{4R}{3\pi} (\operatorname{sen} \theta \theta'' + \operatorname{cos} \theta \theta'^2) \right] + Mg) \vec{j}. \quad (5)$$

$$F_H \left( R - \frac{4R}{3\pi} \operatorname{cos} \theta \right) - F_V \frac{4R}{3\pi} \operatorname{sen} \theta = I_C \theta''. \quad (6)$$

Do teorema dos eixos paralelos,

$$I_O = I_C + M d^2 = I_C + M \left( \frac{4R}{3\pi} \right)^2. \quad (7)$$

Daí,

$$I_C = I_O - M \left( \frac{4R}{3\pi} \right)^2 = \frac{MR^2}{2} - M \left( \frac{4R}{3\pi} \right)^2 = MR^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right). \quad (8)$$

Então, colocando (8) em (6),

$$F_H \left( R - \frac{4R}{3\pi} \operatorname{cos} \theta \right) - F_V \frac{4R}{3\pi} \operatorname{sen} \theta = MR^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right) \theta'' \quad (9)$$

Resolvendo o sistema de equações composto pelas equações (3), (4) e (8), a aceleração angular é dada por

$$\alpha = \theta'' = \frac{\operatorname{sen} \theta \left( \omega^2 + \frac{g}{R} \right)}{\frac{3\pi}{8} - \operatorname{cos} \theta} \quad (10)$$

A força de reação, por sua vez, é dada por

Finalmente se colocam as expressões de  $F_H$  e  $F_V$ , das equações (3) e (4) em função de  $\alpha$ , da equação (9), e se substituem na equação (10).

Marking Scheme: 10 pontos distribuídos da seguinte forma: Item a: 5 pontos.

- 1 ponto por chegar nas equações de  $X_C''$  e  $Y_C''$  (0,5 ponto por cada expressão)
- 4 pontos por chegar na expressão da eq. 5. (2 pontos por escrever a expressão da componente horizontal (eq. 3) e 2 pontos por escrever a expressão da componente vertical (eq. 4))

Item b: 5 pontos.

- 2 pontos pela expressão da segunda lei de Newton para a rotação (eq. 6)
- 1 ponto pelo cálculo do momento de inércia  $I_C$  (eq. 7)
- 3 pontos pela expressão final de  $\alpha$  (eq. 10)

## Q2 - Ondas eletromagnéticas (10 pontos)

Uma onda eletromagnética propaga-se ao longo da direção  $z$  no ar ( $n_{ar} = 1$ ) com polarização linear fazendo  $45^\circ$  com os eixos  $x$  e  $y$ . A expressão matemática que descreve o campo elétrico associado à onda descrita pode ser escrita como

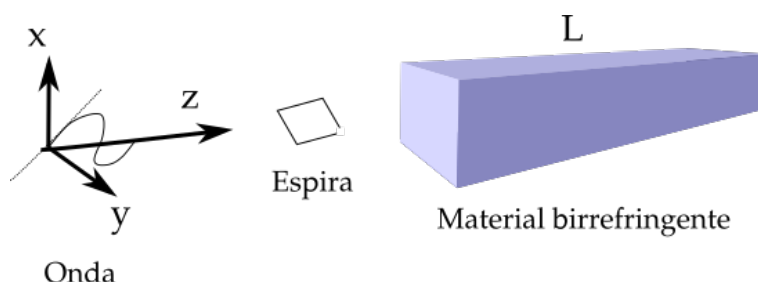
$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos[2\pi(z/\lambda - t/T)](\hat{x} + \hat{y}), \quad (11)$$

em que  $E_0$ ,  $\lambda$  e  $T$  são parâmetros físicos de dimensões adequadas.

### Parte A - Detecção da onda por uma espira

Uma pequena espira quadrada de aresta  $a \ll \lambda$  é fixada na região atravessada pela onda supradescrita. Pode-se utilizar a espira como uma antena capaz de detectar a onda eletromagnética através de uma medida de um sinal de tensão  $V(t)$  entre seus terminais, mantidos em aberto, à medida que a onda se propaga pela região.

- Indique a orientação da espira que permite obter o máximo valor eficaz de tensão induzida detectada entre os terminais da espira. Justifique.
- Calcule o seu valor eficaz máximo  $V_{max}$  que pode ser obtido pela antena.



### Parte B - Controle de polarização

A onda incide sobre um material birrefringente com índices de refração distintos para cada polarização linear. Considere que o índice de polarização para uma onda de polarização em  $\hat{x}$  é  $n_x$ , enquanto o índice de polarização para uma onda de polarização em  $\hat{y}$  é  $n_y$ , com  $n_x > n_y$ . A onda eletromagnética incide perpendicularmente sobre uma das faces do bloco do material descrito, viaja uma distância  $L$  ao longo deste e é retransmitida ao ar. Despreze efeitos de reflexão nas interfaces.

- Determine o menor comprimento  $L$  tal que a onda eletromagnética, ao sair do bloco, tenha polarização circular.

**Gabarito:**

- a) A onda eletromagnética é capaz de induzir uma tensão na espira. Essa tensão pode ser calculada como uma integral de linha

$$\mathcal{E}_{ind} = \oint \vec{E} \cdot \vec{l}. \quad (12)$$

Essa tensão oscila com a mesma frequência da onda. A amplitude é maximizada se a espira está contida no plano de polarização do campo elétrico. Se o plano de polarização e o plano da espira forem ortogonais, a tensão induzida é nula.

- b) A integral de linha fornecida pode ser calculada como

$$\mathcal{E}_{ind} = [E(z+a) - E(z)]a = \frac{\partial E}{\partial z} a^2. \quad (13)$$

Assumindo a condição de máxima amplitude de tensão

$$E(z, t) = \sqrt{2}E_0 \cos [2\pi(z/\lambda - t/T)]. \quad (14)$$

O valor eficaz máximo solicitado é, portanto, dado por

$$\mathcal{E}_{ind} = \frac{2\pi}{\lambda} E_0 a^2. \quad (15)$$

**Obs:** Esse problema admite uma segunda solução na qual o estudante calcula o campo magnético  $\vec{B}(z, t)$  da onda magnética e aplica a lei de Faraday.

- c) O polarização circular é obtida quando há uma defasagem de  $\Delta\theta = \pi/2 + k\pi$  entre as componentes  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ . Para a condição de comprimento  $L$  mínimo,  $\Delta\theta = \pi/2$ . Assim, segue que

$$n_x L - n_y L = \lambda/4 \quad \rightarrow \quad L = \frac{\lambda}{4(n_x - n_y)}. \quad (16)$$

**Marking Scheme:**

a) **2 pt.**

- Pontos parciais podem ser dados para respostas parcialmente corretas.

b) **4 pt.**

+2pt pelo cálculo de  $\mathcal{E}_{ind}$  ou  $\vec{B}$ .

+2pt por resposta correta.

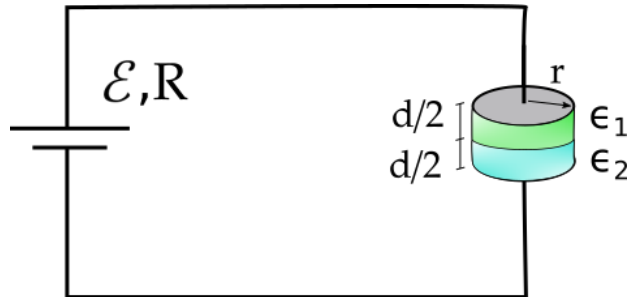
c) **4 pt.**

+2pt por condição de polarização circular.

+2pt pelo cálculo de L.

### Q3 - Carregamento de um capacitor (10 pontos)

Uma fonte de força eletromotriz  $\mathcal{E}$  e resistência interna  $R$  é utilizada para carregar um capacitor inicialmente descarregado. O capacitor é formado por um par de armaduras metálicas circulares de raio  $r$ , paralelas e distantes de  $d$  entre si. As armaduras são perfeitamente superpostas e o volume compreendido é preenchido com materiais isolantes de constantes dielétricas  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ , em mesma proporção como indicado na figura.



A permissividade elétrica do vácuo é dada por  $\epsilon_0$ .

- Calcule a capacitância  $C$  do capacitor descrito. Deixe sua resposta em termos das permissividades elétricas fornecidas e fatores geométricos.
- Descreva a distribuição de cargas de polarização nos dielétricos quando a diferença de potencial elétrico entre as armaduras do capacitor atinge um valor próximo de  $\mathcal{E}$ . Deixe sua resposta em termos de  $C$ ,  $\mathcal{E}$ , raio  $r$  e permissividades elétricas fornecidas.
- Qual dos dois processos demanda mais tempo: carregar o capacitor desde de (i) 0 V até  $0.5 \mathcal{E}$ , ou (ii)  $0.5 \mathcal{E}$  até  $0.8\mathcal{E}$ ? Justifique sua resposta.

a) O valor de  $C$  pode ser calculado por uma associação em série de dois capacitores fictícios em série,

$$\frac{1}{C} = \frac{d/2}{\varepsilon_1 \pi r^2} + \frac{d/2}{\varepsilon_2 \pi r^2} \quad (17)$$

$$C = \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{\pi r^2}{d}. \quad (18)$$

b) A densidade superficial de carga elétrica livre nas armadura é dada por

$$\sigma_l = \frac{Q_l}{A} = \frac{CV}{\pi r^2}. \quad (19)$$

O vetor deslocamento  $D$  é constante no interior do capacitor e dado por  $D = \sigma_l$ . O campo elétrico não apresenta divergência no interior dos dielétricos, logo não há distribuição volumétrica de cargas de polarização.

Para materiais lineares, é possível escrever a seguinte relação entre  $D$  e  $P$

$$\vec{P} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \vec{D}. \quad (20)$$

Assim, nas faces superior e inferior do dielétrico 1 devem haver distribuições superficiais de cargas de cargas elétricas dadas por

$$\sigma_1 = \pm \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \frac{CV}{\pi r^2}. \quad (21)$$

Analogamente, nas faces superior e inferior do dielétrico 2 devem haver distribuições superficiais dadas por

$$\sigma_2 = \pm \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \frac{CV}{\pi r^2}. \quad (22)$$

c) O processo de carregamento do capacitor obedece uma função exponencial. O tempo de carregamento de 0 V até  $0.5 \mathcal{E}$  corresponde a 50% de carregamento, o que leva o mesmo tempo para que o capacitor passe de  $0.5 \mathcal{E}$  para  $0.75 \mathcal{E}$ .

Segue, portanto, que o tempo de carregamento (ii) entre  $0.5 \mathcal{E}$  até  $0.8 \mathcal{E}$  é maior do que o tempo (i) de 0 V até  $0.5 \mathcal{E}$ .

**Obs:** O aluno pode utilizar uma abordagem mais quantitativa, mas suas contas devem eventualmente poder ser reduzidas aos argumentos acima.

#### Marking Scheme:

a) **2 pt.**

+1pt associação em série.

+1pt resposta correta.

b) **5 pt.**

+2pt por análise correta de campos  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  e  $\vec{P}$ .

+1pt por apontar a inexistência de densidade volumétrica de cargas.

+2pt pelo cálculo de densidade superficial de cargas.

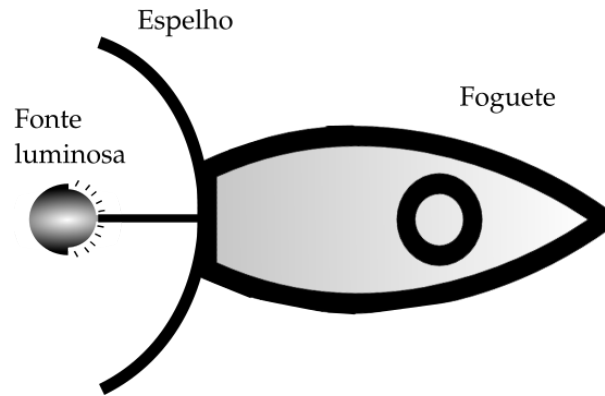
c) **3 pt.**

+2pt Deduzir ou apresentar comportamento exponencial do processo de carregamento.

+1pt prova que o processo (ii) é mais lento que (i).

#### Q4 - Foguete fotônico (10 pontos)

Obras de ficção científica que envolvem viagens espaciais costumam trazer propostas de veículos interestelares bastante curiosas. Considere um foguete fotônico, isto é, um dispositivo capaz de viajar pelo espaço impulsionado apenas por emissão de luz, capaz de atingir velocidades próximas à da luz no vácuo,  $c$ . A estrutura do foguete é ilustrada na figura abaixo.



O foguete é constituído de uma carga útil à sua dianteira. Na sua parte traseira, o foguete dispõe de um espelho com formato parabólico, em cujo foco uma pequena fonte luminosa é fixada. A fim de aumentar a capacidade de propulsão do foguete, a lâmpada emite luz apenas em direção ao espelho, que é revestido por um material refletor ideal. O processo de reflexão da luz pelo espelho é responsável pela aceleração do foguete pelo espaço. Denote por  $m_0$  a massa de repouso inicial do foguete.

- Explique, sucintamente, por que é necessário que a massa de repouso do foguete diminua ao longo do seu processo de aceleração.
- Determine a velocidade  $v$  do foguete em função da sua massa de repouso final,  $m_f < m_0$ .
- Supondo que o foguete atinja a velocidade de  $v = 0,999c$ , calcule a fração de sua massa de repouso não convertida em radiação.



a) Por conservação de energia relativística, é necessário que a massa de repouso do foguete diminua. O processo de aceleração do foguete fotônico é baseado, portanto, em uma conversão de massa em luz, que após a sua reflexão, acelera a carga útil do foguete.

b) Os fótons viajam em linha reta, então, os momentos, assim como as energias, se somam, para os fótons,

$$E_{total} = cP_{total} \quad (23)$$

No problema, podemos considerar todos os fótons como uma única partícula de massa nula, da conservação da energia,

$$E_{foguete} + E_{fótons} = m_0c^2 \quad (24)$$

Da conservação do momento,

$$\vec{P}_{foguete} + \vec{P}_{fótons} = \vec{0} \quad (25)$$

Assim,

$$P_{foguete} = P_{fótons} \quad (26)$$

Daí,

$$E_{foguete} + cP_{fótons} = E_{foguete} + cP_{foguete} = m_0c^2 \quad (27)$$

Da relação Energia - Impulso,

$$E_{foguete}^2 - c^2P_{foguete}^2 = m_f^2c^4 \quad (28)$$

Aqui  $m_f$  é a massa do foguete depois da aceleração. Sabemos que  $P = \gamma mv$  e  $E = \gamma mc^2$ , então  $P/E = v/c^2$ , então, para o foguete,

$$P_{foguete} = E_{foguete} \frac{v}{c^2} \quad (29)$$

Então, usando isto temos duas relações para o foguete, antes,

$$E_{foguete} \left(1 + \frac{v}{c}\right) = E_{foguete} \left(\frac{v+c}{c}\right) = m_0c^2 \quad (30)$$

e depois,

$$E_{foguete}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = E_{foguete}^2 \left(\frac{c^2 - v^2}{c^2}\right) = m_f^2c^4 \quad (31)$$

Elevando ao quadrado a equação para o foguete antes da aceleração,

$$E_{foguete}^2 \frac{(c+v)^2}{c^2} = m_0^2c^4 \quad (32)$$

Dividindo as duas últimas equações,

$$\frac{(c-v)}{c+v} = \frac{m_f^2}{m_0^2} \quad (33)$$

Com mais uns passos algébricos,

$$v = c \left( \frac{m_0^2 - m_f^2}{m_0^2 + m_f^2} \right) \quad (34)$$

c) Como  $v = 0,999c$ , de 27,

$$\frac{m_f}{m_0} = \sqrt{\frac{(c-v)}{c+v}} = 0,02, \quad (35)$$

Marking Scheme (10 pontos):

a) 2 pontos.

b) 6 pontos.

- 2 pontos por chegar na equação 27.
- 1 ponto por chegar na equação 30.
- 1 ponto por chegar na equação 31.
- 1 ponto por chegar na equação 34.

c) 2 pontos.

- 2 pontos por encontrar a relação entre as massas (eq. 35).

### Q5 - Sensores de luz por poços quânticos (10 pontos)

O confinamento de partículas em regiões de pequenas dimensões é capaz de fazer emergir níveis discretos de energia que podem ser explorados em dispositivos optoeletrônicos como sensores ou emissores de luz. Em particular, a faixa de operação desses dispositivos pode ser controlada pela variação das dimensões da região de confinamento do sistema.

Considere um elétron livre confinado por um potencial unidimensional  $V(x)$  descrito pela equação

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < x < a \\ +\infty, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que  $a$  representa a largura do poço de potencial confinante. Faça o que se pede nos itens a seguir.

- a) Assumindo a hipótese de de Broglie, determine os valores absolutos de momento linear,  $|p|$ , que permitam a existência de ondas de matéria estacionárias de elétrons no interior do poço. Forneça sua resposta em termos de  $h$ ,  $a$  e fatores numéricos convenientes.

Os valores de momento encontrados no item anterior têm correspondência com os estados quânticos de energia bem definida do poço proposto.

- b) Determine o valor da largura  $a(\lambda)$  tal que o sistema descrito possa funcionar como um detector de comprimento de onda  $\lambda$ . Considere transições entre o estado fundamental e o estado excitado de menor energia.
- c) Determine o valor numérico dessa largura para que o poço possa servir como um sensor de luz vermelha,  $\lambda = 650$  nm. Forneça sua resposta em nanômetros.

#### Dados:

Constante de Planck  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J.s,

Massa do elétron  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg,

Velocidade da luz  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s.

- a) Condição de onda estacionária

$$a = n\lambda/2 \quad \rightarrow \quad \frac{2a}{n} = \lambda = \frac{h}{p} \quad (36)$$

$$p_n = \frac{nh}{2a}. \quad (37)$$

- b) As energias permitidas do poço são dadas por

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{n^2 h^2}{8ma^2}. \quad (38)$$

Conservando a energia considerando a transição eletrônica descrita

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{(2^2 - 1^2)h^2}{8ma^2} = \frac{3h^2}{8ma^2}. \quad (39)$$

$$a = \sqrt{\frac{3h\lambda}{8mc}}. \quad (40)$$

- c) Substituindo os valores numéricos

$$a = \sqrt{\frac{3 \times 6,63 \cdot 10^{-34} \times 650 \cdot 10^{-9}}{8 \times 9,1 \cdot 10^{-31} \times 3 \cdot 10^8}} = 7,7 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,77 \text{ nm}. \quad (41)$$

Marking Scheme:

- (a) 4 pontos: 2 pt para de Broglie e 2 pt pelo resultado final.
- (b) 4 pontos: 2pt pela relação  $E \times p$  e 2pt pela expressão final.
- (c) 2 pontos pelo cálculo numérico correto.