

Q1 - Superfície "harmônica" (10 pontos)

Um plano infinito tem uma superfície lisa e "harmônica", definida por $u(x) = h \cos \frac{x}{\lambda}$, onde $\frac{h}{\lambda} \ll 1$. O plano é então inclinado com relação à horizontal por um ângulo $\theta \ll 1$ (ver figura 1). Uma partícula de massa m move-se sobre este plano com velocidade variável $v(x)$. A coordenada x originalmente se refere à direção horizontal.

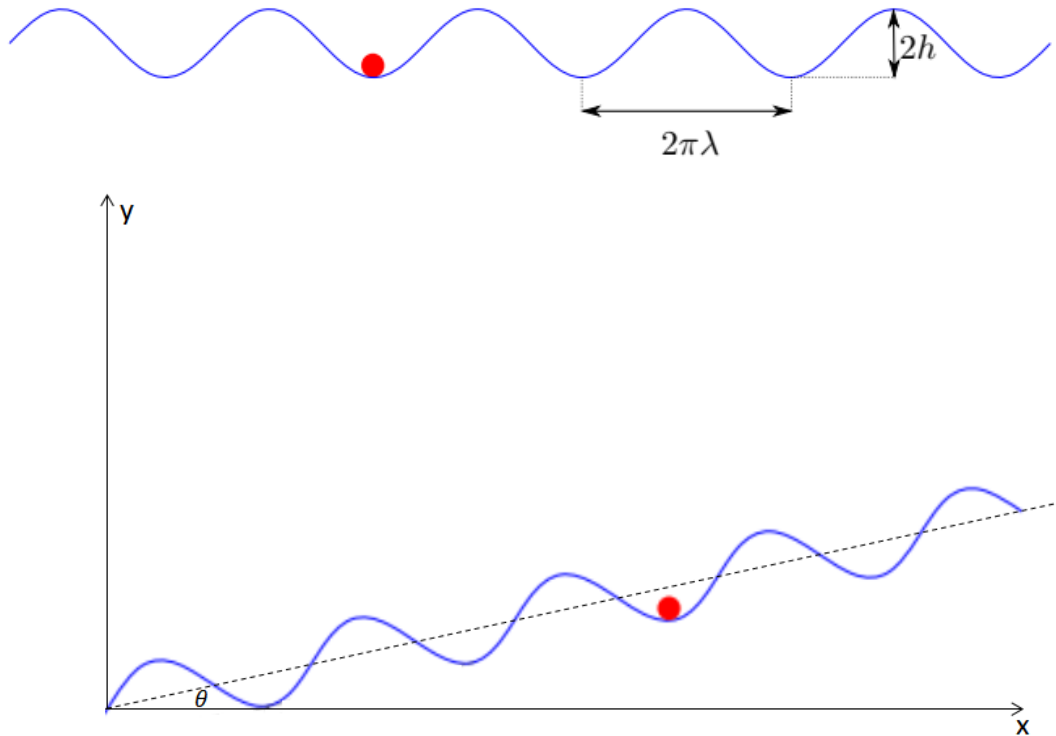


Figura 1: Plano "harmônico" infinito

- | | | |
|-----------|--|-------|
| a. | Encontre a expressão do vetor de posição da partícula sobre o plano inclinado, no referencial da figura (x, y) , em termos de x' , θ e λ . Aqui x' é a coordenada ao longo da linha pontilhada, rotacionada de um ângulo θ . | 3,0pt |
| b. | Escreva sua equação de movimento em termos da velocidade $v(x)$ e a posição x da partícula. Assuma que a gravidade é a única força externa presente. Assuma também que $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$, etc. | 3,0pt |
| c. | Considere a situação em que $\theta \neq 0$ inicialmente ($\theta \ll 1$), e a partícula repousa sobre um mínimo do potencial. Encontre a velocidade crítica v_{0C} que deve ser fornecida, a partir da qual a bolinha ultrapassa a primeira crista. | 1,0pt |
| d. | Ainda na condição de $\theta \ll 1$, encontre o ângulo acima do qual não há mais mínimos locais de energia potencial, isto é, para o qual a bolinha desce sempre. | 3,0pt |

Gabarito:

a) Fazendo uma rotação de coordenadas (ver figura 2)

$$x_p = x'_p \cos \theta - y'_p \sin \theta$$

$$y_p = x'_p \sin \theta + y'_p \cos \theta$$

Onde

$$y'_p = h \cos \frac{x'}{\lambda}$$

Então

$$r'(x', \theta) = x'_p \hat{x} + y'_p \hat{y} = \left[x'_p \cos \theta - \cos \left(\frac{x'}{\lambda} \right) \sin \theta \right] \hat{x} + \left[x' \sin \theta + h \cos \left(\frac{x'}{\lambda} \right) \cos \theta \right] \hat{y}$$

b) Da geometria do sistema, a energia potencial é

$$U(x', \theta) = mgy_p = mg \left[x' \sin \theta + h \cos \left(\frac{x'}{\lambda} \right) \cos \theta \right]$$

Usando $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$ e $\cos \theta \approx 1$

$$U(x', \theta) \approx mg \left[x' \theta + h \cos \left(\frac{x'}{\lambda} \right) \right]$$

Daí

$$F_{pot} = -\frac{dU}{dx'} = mg\theta - mg \frac{h}{\lambda} \sin \frac{x'}{\lambda} = m \frac{d^2 x'}{dt^2}$$

c) A bolinha sobe uma altura $\approx 2h$, a partir de um mínimo de energia potencial, chegando com velocidade nula no topo da crista seguinte, assim

$$m \frac{v_{0C}^2}{2} \approx mg2h \Rightarrow v_{0C} \approx 2\sqrt{gh}$$

d) A derivada da função, no ponto de inflexão precisa ser nula, ver figura 3. Isto também significa que a derivada da função é igual à tangente do ângulo de inclinação θ . Assim

$$\left| \frac{du(x)}{dx} \right| = \frac{h}{\lambda} \sin \frac{x_{inf}}{\lambda} = \tan \theta_{crit}$$

Cálculo do ponto de inflexão $x_{inf} \dots$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[h \cos \frac{x}{\lambda} \right] = -\frac{h}{\lambda^2} \cos \frac{x}{\lambda} = 0$$

Daí

$$\cos \frac{x}{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{x}{\lambda} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \Rightarrow x_{inf} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \lambda$$

Então, colocando x_{inf} na primeira equação e igualando a zero...

$$\tan \theta_{crit} = \frac{h}{\lambda} \sin \frac{\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \lambda}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}$$

Aqui usamos apenas a solução positiva porque o ângulo é do primeiro quadrante. Finalmente...

$$\theta_{crit} = \arctan \frac{h}{\lambda}$$

Q2 - Um problema simples sobre fluidos contínuos. (10 pontos)
Parte A. Bocal redutor (5,0 pontos).

Uma tubulação em forma de bocal, com área de saída A_2 , é montado na extremidade de um tubo da área A_1 , conforme mostrado na figura abaixo. O bico converge gradualmente, desde a entrada até a saída, e podemos

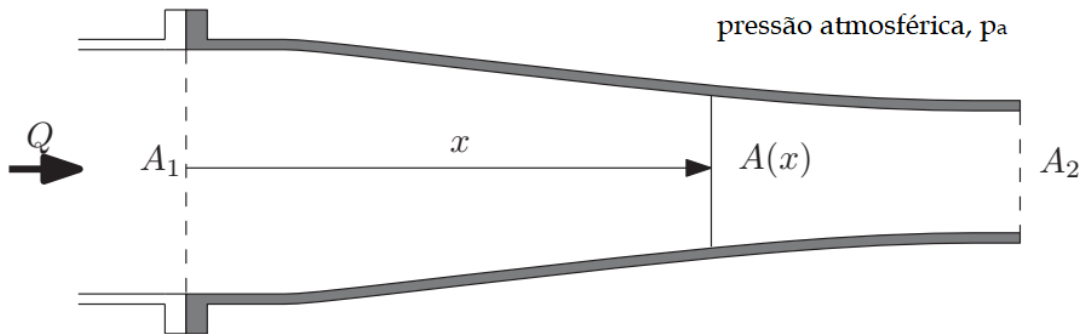


Figura 2: Bocal redutor

assumir que o fluxo nele é (i) aproximadamente uniforme em qualquer ponto x , (ii) incompressível e (iii) não viscoso. Podemos considerar também que os efeitos gravitacionais são desprezíveis. A vazão volumétrica no bocal é dada como Q e a pressão ambiente é p_a .

- a. Encontre uma expressão para a diferença de pressões entre um ponto x , dentro do bocal, e seu extremo direito, em função da área da seção transversal da tubulação nesse ponto, $A(x)$, a densidade da água, e outros parâmetros conhecidos. 4,0pt

- b. Mostrar, integrando a componente x da força de pressão nas paredes internas do bocal, que o componente x “líquida” da força no bocal, devido ao fluxo, é independente do contorno específico do bocal e é dada por: 4,0pt

$$F_x = \rho Q^2 \frac{(A_1 - A_2)^2}{2A_1 A_2^2}$$

- c. A expressão em (b) prediz que F está na direção x positiva, independentemente de o bocal estar convergindo ($A_2 < A_1$) ou divergindo ($A_2 > A_1$). Explique este fato. 2,0pt

Gabarito:

a) Da equação de continuidade entre a entrada e o ponto x , dentro do bocal

$$v_1 A_1 = v(x) A(x) \Rightarrow v(x) = v_1 \frac{A_1}{A(x)} = \frac{Q}{A(x)}$$

Da equação de Bernoulli, entre o ponto x e o extremo direito da tubulação

$$p(x) + \frac{1}{2} \rho v(x)^2 = p_a + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow \Delta p = \frac{1}{2} \rho [v_2^2 - v(x)^2]$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} \Rightarrow \Delta p(x) = \frac{1}{2} \rho Q^2 \left[\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A(x)^2} \right]$$

b) Fazendo um zoom na figura 4, (ver figura 5), podemos ver que a componente x da força de pressão age sobre a área efetiva transversal. É fácil perceber que essa área efetiva é um anel

$$A_{ef} = [A_1 - A(x)]$$

$$F_x = \int_1^2 dF_x = \int_1^2 \Delta p(x) d[A_1 - A(x)] = - \int_{A_1}^{A_2} \Delta p(x) dA(x)$$

Substituindo $\Delta p(x)$ e integrando, chegamos à expressão buscada

$$F_x = \frac{\rho Q^2}{2} \frac{(A_1 - A_2)^2}{A_1 A_2^2}$$

c) Quando o bocal é convergente Δp é positivo (A_2 é menor), ou seja, a pressão dentro é maior que fora, isso quer dizer que a força age, como mostrado na figura 6 acima, sobre as paredes internas. Quando o bocal é divergente (A_2 maior), Δp é negativo, ou seja, maior na parte externa, com isso a força age sobre as paredes externas.

Q3 - Motor a combustão interna (10 pontos)

As máquinas térmicas desempenham um papel fundamental na indústria, convertendo energia térmica resultante da queima de diferentes combustíveis em trabalho mecânico. Um exemplo comum de máquina térmica é o motor de combustão interna utilizado em veículos, como o motor a gasolina. Esse ciclo termodinâmico pode ser modelado conforme o gráfico $P \times V$ a seguir.

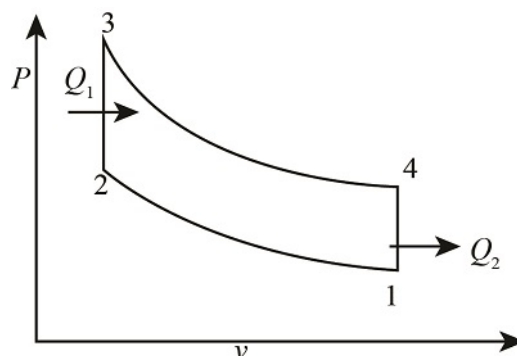


Figura 3: Diagrama PV do ciclo Otto.

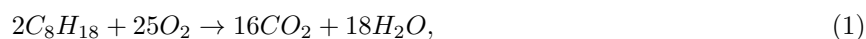
O ciclo pode ser dividido em 4 etapas:

- i) Compressão adiabática (1 → 2);
- ii) Aumento de pressão isocórico devido a ignição do combustível (2 → 3);
- iii) Expansão adiabática (3 → 4);
- iv) Processo isocórico de rejeição de calor ao ambiente, seguido de readmissão (4 → 1).

- a.** Estime o rendimento de uma motor baseado no ciclo Otto, cuja razão de volumes é dada por $V_1/V_2 = 10$. Considere que o coeficiente de expansão adiabática do gás de operação do ciclo é dado por $\gamma = 1,4$ e despreze efeitos associados à variação do número de partículas devido à reação de combustão. 4,0pt

Além da taxa de compressão do ciclo, existem outras propriedades que podem caracterizar os diferentes motores, entre elas o volume do cilindro. O volume total dos cilindros de um motor são medidos em cilindradas (1 cilindrada = 1 cm³). Um motor 1.0 tem 1000 cilindradas de volume total dos seus pistões, enquanto um motor 1.6 tem 1600 cilindradas.

A reação de queima que acontece no interior do cilindro pode ser idealizada como a queima do octano (C_8H_{18}) na presença de oxigênio



que libera aproximadamente 5.460 kcal/mol de octano. O calor liberado por essa reação química corresponde ao calor Q_1 na transformação gasosa (2 → 3). Considere também a constante universal dos gases perfeitos dado por $R = 0,0082 \text{ atm.L/mol.K}$.

- b.** Considerando que a mistura octano-oxigênio entra no cilindro de um motor 1.0 a 350 K, em proporção ótima para a sua queima completa, calcule quantos mols de octano são admitidos no motor por ciclo. 2,0pt

c. Estime o trabalho W realizado durante um ciclo do motor. Por simplicidade, despreze efeitos associados à variação do número de partículas no interior do cilindro ao longo do ciclo. 2,0pt

d. Estime a potência, em watts, de um carro 1.0 operando a 1500 ciclos por minuto. Despreze perdas não citadas no enunciado. 2,0pt

O valor estimado é bastante superior à potência de carros convencionais. Em uma situação real existem outras fontes de perda no motor, assim como uma menor capacidade de extrair calor da reação química de combustão.

Gabarito:

a) A eficiência do ciclo termodinâmico pode ser calculada como

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

em que $Q_1 = C_v(T_3 - T_2)$ e $Q_2 = C_v(T_4 - T_1)$.

Considerando, a partir do valor fornecido de γ , $C_v = 5R/2$, segue que

$$Q_1 = \frac{5}{2}(P_3V_3 - P_2V_2)$$

$$Q_2 = \frac{5}{2}(P_4V_4 - P_1V_1)$$

A expressão pode ser simplificada em termos de $r = V_1/V_2$

$$\eta = 1 - r \frac{P_4 - P_1}{P_3 - P_2}.$$

A razão entre essa diferença de pressões consiste, da equação da transformação adiabática ($PV^\gamma = cte.$), em $r^{-\gamma}$.

Assim, o rendimento estimado da máquina operando segundo o ciclo de Otto é dada por

$$\eta = 1 - r^{1-\gamma}.$$

Substituindo os valores fornecidos, segue que $\eta = 0,6$.

b) Do enunciado conclui-se que o volume do motor é de 1l. Com a equação de Clapeyron, estimamos o número total de mols da mistura gasosa:

$$PV = nRT \rightarrow n = 0,348 \text{ mol}.$$

Essa quantidade de matéria relaciona-se com a proporção estequiométrica da reação química:

$$n_{oct} = \frac{2}{27} 0,348 = 0,0257 \text{ mol}.$$

c) O calor Q_1 pode ser estimado como

$$Q_1 = \frac{5460 \text{ kcal}}{1 \text{ mol}} \cdot 0,0257 \text{ mol} = 140 \text{ kcal}.$$

Por sua vez, o trabalho é obtido utilizando o valor de eficiência estimada

$$W = \eta Q_1 = 84,4 \text{ kcal.}$$

d) A potência é dada pelo produto do trabalho por ciclo pela frequência f de ciclos por unidade de tempo

$$P = W.f = 84,4 \text{ kcal.} \cdot \frac{1500}{60\text{s}} \cdot \frac{4,2\text{J}}{1\text{cal}} = 8862\text{kW.}$$

Q4 - Ondas Sonoras (10 pontos)

Fenômenos ondulatórios genéricos unidimensionais são matematicamente modelados, desprezando efeitos dissipativos, por uma mesma equação diferencial conhecida como “equação de onda”:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad (2)$$

em que $f(x, t)$ representa uma quantidade física perturbada pela onda e v a velocidade de propagação da onda. Ondas sonoras podem ser entendidas tanto como uma perturbação do valor da pressão de um gás, como no deslocamento médio de partículas, que se propaga ao longo do espaço com uma velocidade v_s .

Admita um gás ideal inicialmente submetido à pressão P_0 e temperatura T_0 , cuja massa molar seja dada por M . As partículas do gás são perturbadas por uma membrana de um alto-falante, de tal forma que uma onda de deslocamento senoidal dada por

$$u(x, t) = A_u \cos(kx - \omega t) \quad (3)$$

é gerada. Considere que as transformações gasosas envolvidas acontecem adiabaticamente, que a constante universal dos gases é dada por R e que o seu coeficiente de Poisson vale γ .

a. Determine uma expressão para a densidade volumétrica ρ do gás em função de P_0 , M , R e T_0 . 2,0pt

b. Determine a relação entre as variações relativas de volume $\left(\frac{dV}{V}\right)$ e pressão $\left(\frac{dP}{P}\right)$ de um gás ideal que realiza uma transformação adiabática. 2,0pt

c. Determine uma expressão para a onda de pressão do gás $p(x, t)$ em torno do valor de equilíbrio P_0 . Deixe a sua resposta em termos de P_0 , A_u , k , ω e γ . 3,0pt

d. Deduza a expressão da velocidade da onda sonora v_s através do gás. 3,0pt

Gabarito:

a) Equação de Clapeyron, segue que

$$PV = nRT = \frac{m}{M} RT$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}.$$

b) Diferenciando a equação da transformação adiabática:

$$PV^\gamma = cte. \quad \rightarrow \quad dPV^\gamma + \gamma PV^{\gamma-1} = 0$$

$$\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V}.$$

c) Tomando uma porção fixa de gás, a variação relativa do volume por ele ocupado corresponde a

$$\frac{dV}{V} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Logo, existe uma relação entre as ondas de deslocamento e pressão dada por

$$\frac{p(x)}{P_0} = -\gamma \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Portanto, a onda de pressão pode ser escrita como

$$p(x) = \gamma A_u k P_0 \text{sen}(kx - \omega t).$$

d) O gradiente de pressão gera uma força resultante F_R que influencia a aceleração média das partículas. Veja:

$$F_R = \frac{\partial P}{\partial x} dx A = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Utilizando a relação , segue que

$$-\gamma P_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

que pode ser reescrita como uma equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

A velocidade da onda é dada, portanto por,

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}.$$

Q5 - Ondas guiadas (10 pontos)

Guias de onda são estruturas que permitem a propagação controlada de ondas, como ondas eletromagnéticas ou acústicas, ao longo de um caminho definido. Eles são projetados para confinar e direcionar a energia da onda, evitando sua dispersão e perda durante a propagação. Essas estruturas podem ter diferentes formas e materiais, como cabos de fibra óptica, linhas de transmissão ou tubos acústicos. Esses dispositivos desempenham um papel fundamental nas áreas de telecomunicações, eletrônica e medicina.

Um guia de ondas eletromagnéticas pode ser construído por quatro paredes metálicas que confinam a propagação da onda no seu interior. Considere um guia desse tipo, de seção quadrada de aresta a , paralela ao plano x, y , no qual a onda pode ser propagar ao longo da direção z , conforme uma função do tipo

$$f(x, y, z) = f(x, y)\cos(k_{m,n}z - \omega t), \quad (4)$$

em que os índices (m, n) representam diferentes modos guiados possíveis, podendo assumir valores não negativos e não-simultaneamente nulos, isto é, $(m, n) \in \{ (1,0); (0,1); (1,1); (2,0); (2,1), \dots \}$. A função $E_{m,n}(x, y)$ descreve o comportamento da onda ao longo da seção transversão $z = cte$, enquanto o termo $\cos(k_{m,n}z - \omega t)$ descreve o seu comportamento propagante.

- a. Calcule o comprimento de onda $\lambda_{m,n}$ da onda descrita em função dos parâmetros físicos apresentados até este ponto do enunciado. 1,0pt

A relação entre a frequência angular da onda ω , $k_{m,n}$, a aresta a e os índices (m, n) é dada pela equação

$$k_{m,n}^2 + \frac{\pi^2}{a^2}(m^2 + n^2) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2. \quad (5)$$

Essa equação caracteriza a relação entre a frequência angular ω da onda eletromagnética que excita o guia de ondas, a geometria do guia (a), o número de onda k e os índices que caracterizam os diferentes modos normais de oscilação (m, n) .

- b. Demonstre a existência de uma frequência de corte $\omega_{m,n}$ a partir da qual o modo (m, n) pode começar a ser observado e calcule o seu valor. 3,0pt

O guia de ondas descrito caracteriza-se por ser dispersivo, isto é, ondas com diferentes frequências ω viajam com diferentes velocidades. Esse fato pode ser verificando comparando as velocidades de fase e de grupo da onda considerada.

- c. Calcule a velocidade de fase v_f da componente de uma onda eletromagnética com frequência angular ω no modo $(m, n) = (1, 0)$. 3,0pt

- d. Calcule a velocidade de grupo v_g da onda de um pacote de onda com frequência angular dada por ω no modo $(m, n) = (1, 0)$. 3,0pt

Gabarito:

a) O comprimento de onda guarda uma relação direta com o número de onda k . Logo:

$$\lambda_{m,n} = \frac{2\pi}{k_{m,n}}.$$

b) Como os índices m e n não podem ser simultaneamente nulos, segue que

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 > \frac{\pi^2}{a^2}.$$

A frequência de corte para haver propagação através do guia de onda é, portanto, dada por

$$\omega_c = \frac{\pi c}{a}.$$

c) Substituindo os valores de índices $(m, n) = (1, 0)$ e isolando o número de onda k , obtém-se

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}.$$

Dividindo a expressão por ω^2 e utilizando a definição de velocidade de fase $v_f = \frac{\omega}{k}$, segue que

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{v_s^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{\pi^2}{\omega^2 a^2}.$$

$$v_s = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \frac{\pi^2 c^2}{a^2}}}.$$

d) A velocidade de grupo é definida como

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

Diferenciando a relação de dispersão, segue que

$$k dk = \frac{\omega d\omega}{c^2},$$

o que implica na seguinte relação entre v_f , v_g e c :

$$c^2 = v_f v_g.$$

Que determina a velocidade de grupo v_g , dada por

$$v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{a\omega}\right)^2}.$$