



OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE FÍSICA

Prova Seletiva 2 - SOIF / 2024

16 e 17 de dezembro de 2023

INSTRUÇÕES

1. A prova é composta por 5 questões. Sem contar essa folha de rosto, ela contém 6 páginas.
2. A duração da prova é de 5 horas ininterruptas. O tempo de prova começa no instante de acesso ao caderno de questões.
3. **Todas as respostas devem ser justificadas**, ou seja, a resolução da questão compreendida pelas principais etapas que levam às respostas deve ser apresentada.
4. **As resoluções devem escritas de próprio punho** em folhas inicialmente em branco (não use editores de texto). É permitido apenas o uso de caneta, de cor **azul ou preta**, lápis preto de traço forte, régua e calculadora **não programável**.
5. As folhas com a resolução de cada questão devem ser escaneadas no formato PDF. Um documento PDF (documento resposta) para cada questão.
6. Cada documento resposta deve ser enviado (submetido) através da correspondente interface de respostas em <https://app.graxaim.org/soif/2024>.
7. Quando um documento resposta é enviado a questão é considerada respondida. Não é possível enviar um documento para substituir outro já enviado.
8. Você pode responder as questões (enviar os documentos) em qualquer ordem. **Atenção para não enviar o documento resposta de uma questão no lugar de outra.**
9. Durante a prova, é permitido o uso de celular ou computador **apenas** para acessar o site <https://app.graxaim.org/soif/2024>, ou para trocas de mensagens com os coordenadores da SOIF através do endereço equipeobf@graxaim.org. **Todos os demais usos (aplicativos gráficos e numéricos, consultas, busca na internet, etc) são proibidos.**

Q1 - CORDAS EM ROTA DE COLISÃO (10 pontos)

Uma corda flexível, homogênea e inextensível, de massa m , desloca-se com uma velocidade v , ao mesmo tempo que gira com velocidade angular ω , ao redor do seu centro de massa. Uma segunda corda, igual à primeira, é posicionada em repouso, conforme esquematizado na figura 1. Na figura destacamos os extremos com duas esferas cinzas. Ambas cordas ficam inicialmente esticadas até seu comprimento máximo l .

O movimento se dá de tal forma que os extremos de uma corda coincidem simultaneamente com o da outra corda. Após a colisão, os extremos ficam colados e as duas cordas continuam o movimento. Despreze qualquer tipo de dissipação não mencionada no texto.

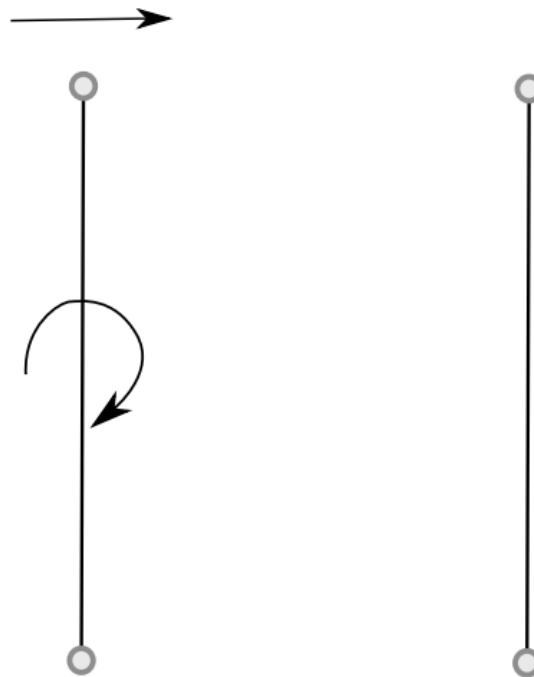


Figura 1: Movimento das cordas antes da colisão.

- | | | |
|-----------|---|-------|
| a. | Qual é a condição que deve ser cumprida em relação às velocidades v e ω para que colisão descrita aconteça? | 3,0pt |
| b. | Considerando que as cordas são flexíveis, use argumentos baseados na minimização da energia para determinar a forma final do sistema de cordas depois da colisão. | 4,0pt |
| c. | Encontre a velocidade angular do par de cordas (com respeito ao seu centro de massa) após a colisão. | 3,0pt |

Q2 - TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS (10 pontos)

Neste problema exploraremos como conceitos elementares de termodinâmica podem ser aplicados em sistemas complexos como buracos negros. De acordo com Bekenstein e Hawking, a entropia de um buraco negro é proporcional a sua área A da forma

$$S = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} A.$$

Para buracos negros de massa M e raio R , que possuem a propriedade de “capturar” até a luz, nada escapa do seu “universo”. Consideremos os buracos negros perfeitamente “esféricos”.

Parte A - Velocidade de escape do buraco negro

Estimativas relacionadas a buracos negros podem ser feitas por meio de abordagens clássicas como cálculo de “velocidade de escape” de um corpo de massa M e raio R . O raio de um buraco negro é definido como o limite tal que luz não possa escapar dele.

- | |
|---|
| A.1 Encontre a expressão da massa M de um buraco negro de raio R de tal forma que a luz não consiga escapar de sua superfície. 1,0pt |
|---|

Parte B - Termodinâmica dos buracos negros

Considere dois buracos negros de massa $M_1 = M$ e raio R_1 , que colidem, gerando um único buraco negro de raio R_2 . Despreze qualquer tipo de dissipação de energia envolvido no processo.

- | |
|--|
| B.1 Determine uma expressão para a variação de entropia associada a esse processo em função de M e constantes. Ela será positiva ou negativa? Particularize sua expressão para $M \approx 2 \times 10^{30}$ kg. 2,5pt |
|--|

A temperatura de um objeto pode ser estimada por uma relação entre energia interna (E) e sua entropia (S). Esta relação é chamada de **temperatura estatística** do sistema, cujo inverso é

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}.$$

- | |
|--|
| B.2 A energia interna de um buraco negro é dada pela equação de Einstein $E = Mc^2$. Encontre a temperatura de um buraco negro em termos da sua massa. 2,0pt |
|--|

Parte C - Tempo de vida de buracos negros

Hawking propôs um mecanismo pelo qual o buraco negro pode **emitir radiação térmica** devido a processos de criação de pares em seu horizonte de eventos. O processo se dá tal qual um corpo negro de temperatura T .

- | |
|---|
| C.1 Encontre a taxa de perda de energia por tempo devido à radiação do buraco negro. 1,5pt |
|---|

- | |
|--|
| C.2 Determine uma expressão para o intervalo de tempo que um buraco negro isolado leva para “evaporar”. Quanto tempo dura um buraco negro de massa inicial igual à do Sol ($M \approx 2 \times 10^{30}$ kg)? 3,0pt |
|--|

Q3 - Diversão Infinita com Circuitos (10 pontos)

Neste problema revisitaremos uma questão famosa de resistência equivalente de circuitos elétricos infinitos. Na figura 2 **a)** abaixo, representamos um circuito infinito numa malha quadriculada em duas dimensões, onde todos os resistores tem valor igual a 1Ω . É possível, através de um argumento de sobreposição e linearidade, mostrar que a resistência equivalente entre pontos adjacentes na malha A e B é $R_{AB} = \frac{1}{2}\Omega$. Não é necessário provar este resultado neste problema.

Analisaremos duas variações deste circuito, nas quais consideraremos defeitos nas resistências (itens **A.** e **B.**) e o efeito da geometria da malha (item **C.**). Os três itens podem ser resolvidos independentemente.

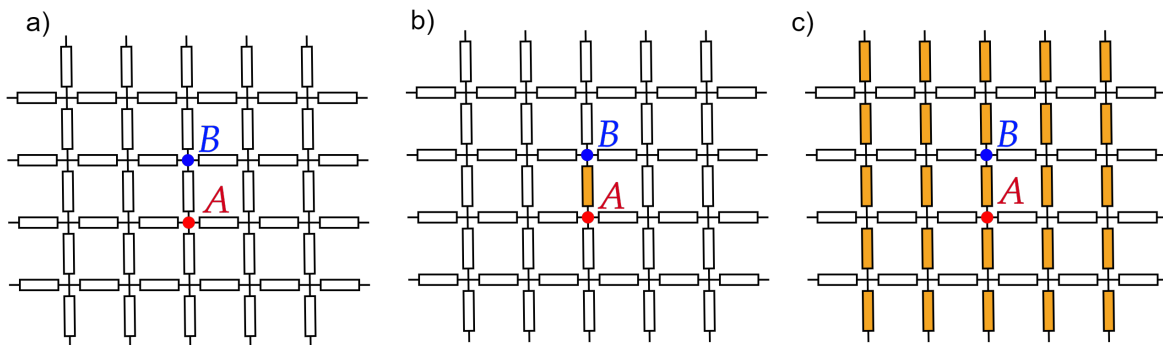


Figura 2: a) Circuito infinito em duas dimensões. Cada resistor tem valor de 1Ω . b) O circuito infinito com um defeito. c) Circuito infinito com defeitos em todos os resistores verticais. Cada resistor com defeito tem resistência elétrica de 2Ω .

Na figura 2 **b)** temos um *defeito* no nosso circuito, fazendo com que a resistência elétrica do resistor entre A e B dobre, agora sendo de 2Ω . Na figura 2 **c)**, o defeito no circuito afeta *todos* os resistores verticais. Dessa forma todos os verticais têm resistência elétrica de 2Ω , enquanto resistores os horizontais continuam tendo valor 1Ω .

Circuitos bidimensionais

A. (Um Defeito na Malha) No caso da malha com um *defeito* como na figura 2**b)**, qual a nova resistência equivalente entre os pontos A e B ? 2.0pt

B. (Vários Defeitos na Malha) No caso da malha com *defeitos* em todos os resistores verticais como na figura 2**c)**, mostre que a resistência equivalente entre os pontos A e B , R_{AB} satisfaz 4.0pt

$$0.6\Omega \leq R_{AB} \leq 0.9\Omega.$$

Pontos parciais serão dados para qualquer progresso em delimitar o valor de R_{AB} por cima ou por baixo.

Circuito tridimensional

Estudaremos agora o efeito da geometria da malha infinita na resistência equivalente entre dois pontos distantes. Na figura 2), representamos circuitos infinitos em malhas de $D = 1, 2, 3$ dimensões, onde todos os resistores tem valor igual a 1Ω , nas figuras **a)**, **b)**, **c)** respectivamente. O ponto A esta localizado na origem das malhas, e o ponto C esta no eixo \hat{x} , a uma distância de n resistores da origem, onde $n \in \mathbb{N}$ é um inteiro. Todos os circuitos considerados são infinitos para todas as dimensões representados.

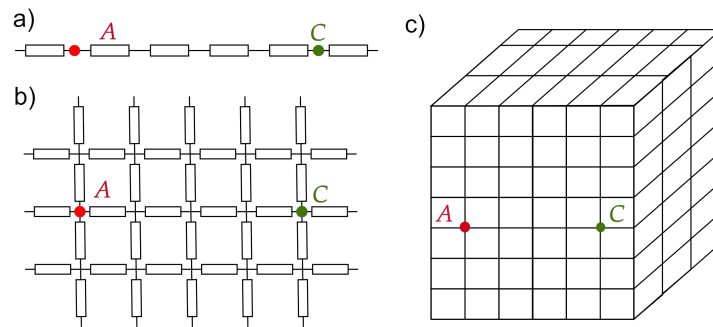


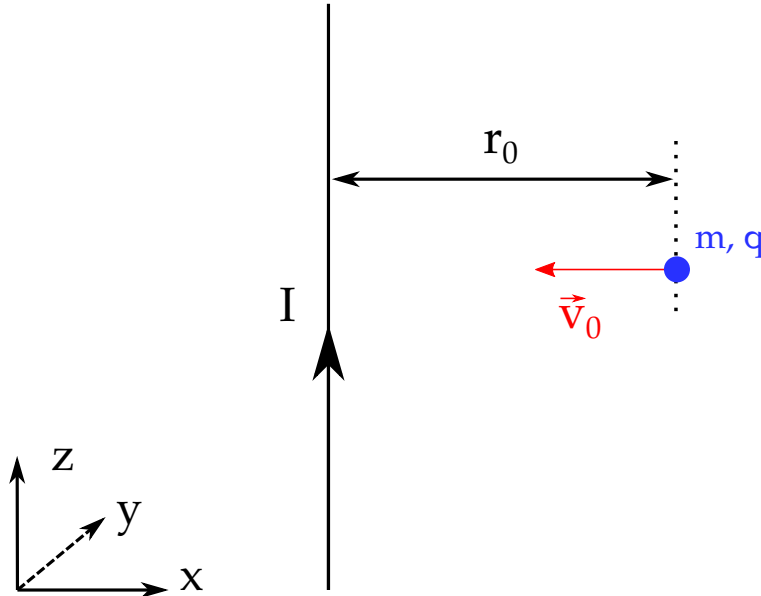
Figura 3: **a)** Circuito infinito em 1D, onde C está a uma distância n da origem A . **b)** Circuito infinito em 2D, onde C está na coordenada $(n, 0)$. **c)** Circuito infinito em 3D, onde C está na coordenada $(n, 0, 0)$. Todas as figuras tem $n = 4$.

C.	(Resistências equivalentes em várias dimensões) No limite de $n \gg 1$, <i>estime</i> a resistência equivalente $R_{AC}(n)$ entre os pontos A e C , em 1D, 2D e 3D, em função de n . Justifique.	4.0pt
-----------	---	-------

Pontos integrais serão dados a qualquer resposta que acerte a dependência de $R_{AC}(n)$ com n . Não se preocupe com constantes numéricas, apenas com a dependência em n .

Q4 - Partícula sob campo de um fio infinito (10 pontos)

Considere um fio infinito carrega uma corrente $I > 0$ ao longo do eixo \hat{z} de um sistema cartesiano de coordenadas. Uma partícula de massa m e carga $q > 0$, inicialmente à distância x_0 do fio, é lançada com velocidade v_0 em direção a este ($-\hat{x}$), como mostra a figura abaixo.



A. Calcule o vetor do campo magnético \vec{B} em um ponto no plano xz a uma distância geral x do fio. 2.0pt

B. Determine expressões para as componentes da aceleração da partícula: $\frac{dv_x}{dt}$, $\frac{dv_y}{dt}$, e $\frac{dv_z}{dt}$. Deixe sua resposta em função de q , m , I , v_x , v_y , v_z , e a distância da partícula ao fio x . 3.0pt

Inicialmente, a partícula se aproxima do fio, mas passado um tempo, ela atinge uma distância mínima do fio, a partir do qual, depois disso, ela começa a se afastar do fio. Nesse momento de distância mínima, a velocidade da partícula pode ser escrita como $\vec{v} = V_x\hat{x} + V_y\hat{y} + V_z\hat{z}$.

C. Determine os valores de V_x , V_y e V_z . 2.0pt

D. Qual é a distância mínima x_{min} que a partícula chega do fio? 3.0pt

Dica: Se necessário, use a integral

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

Q5 - UMA VISÃO “QUÂNTICA” DE PROBLEMAS CLÁSSICOS (10 pontos)

O conceito de **Ondas de Matéria** foi proposto por Louis D’Broglie em 1924, na sua tese apresentada à Faculdade de Ciências da Universidade de Paris. D’Broglie propôs que, ao movimento de toda partícula, estava associada uma **onda** cujo comprimento de onda, λ_{DB} , se relaciona com o momento linear da partícula através da expressão

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p}$$

onde $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J.s é a constante universal de Planck. Desta forma, segundo D’Broglie, a matéria teria caráter dual, se comportando, dependendo da natureza do fenômeno em questão, como uma onda ou como uma partícula. As funções que descrevem as ondas de matéria de D’Broglie são chamadas de **Funções de onda**, e constituem o objeto matemático fundamental da **Mecânica Quântica**.

Max Born deu uma interpretação probabilística a estas funções. O módulo ao quadrado da função de onda representa a função **Densidade de Probabilidade** associada à probabilidade da ocorrência do evento específico caracterizado por dita função, ou seja, por exemplo

$$|\psi(x, t)|^2 = f(x, t)$$

é a função densidade de probabilidade ligada à probabilidade de, durante um processo de “medição”, encontrarmos uma partícula na posição x , no instante t . Da teoria das probabilidades, para este exemplo específico, sabemos que a probabilidade de encontrarmos a partícula, no instante t , na posição x é dada por:

$$P(x, t) = f(x, t)\Delta x \Rightarrow P(x, t) = \int f(x, t)dx.$$

Em um dado instante de tempo, o valor médio de uma grandeza qualquer, num certo intervalo ($x_1 \leq x \leq x_2$) pode ser calculado a partir desta função densidade de probabilidade como segue:

$$\langle A \rangle = \int_{x_1}^{x_2} Af(x)dx$$

Como consequência do postulado de D’Broglie e de propriedades simples comuns a todas as ondas, Werner Heisenberg mostrou que não é possível determinar, por meio de uma experiência real, a posição e o momento linear da matéria ou da radiação, simultaneamente. A precisão destas medidas simultâneas, estão relacionadas através de uma expressão conhecida como **Relação de Incerteza** de Heisenberg. O princípio de Heisenberg diz, na realidade, que, mesmo que tenhamos instrumentos ideais, nunca poderemos obter, na medição simultânea, resultados melhores do que

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$$

Nesta expressão, Δx e Δp são as incertezas nas medições da posição x e do momento p_x .

Parte A: A partícula livre e o princípio de incerteza

O princípio de incerteza de Heisenberg, na sua versão para a energia e o tempo tem a forma $\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$. Uma interpretação desta expressão é a seguinte: sistemas estáveis possuem um “tempo de vida” elevado, enquanto que sistemas instáveis duram pouco.

Considere uma partícula em movimento uniformemente acelerado, durante o qual, a posição varia com o tempo da forma $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

- | | |
|---|-------|
| <p>a. Prove que as expressões do princípio de incerteza nas versões momento-coordenada e energia-tempo, correspondentes ao movimento desta partícula são equivalentes. Suponha que a partícula se move, o tempo todo, na direção horizontal, coincidente com o nível zero de energia potencial.</p> | 3,0pt |
|---|-------|

Parte B: Partícula numa caixa vertical sob efeito da gravidade

Imagine uma partícula em queda livre a partir de uma altura $h \ll R_{Terra}$. Analise o movimento desta partícula sob os efeitos do campo gravitacional terrestre, e a partir desta análise, faça o que se pede nos itens a seguir.

- b.** Encontre uma expressão para o valor mais provável $\langle y(t) \rangle$ da posição da partícula em qualquer instante de tempo. Comente o resultado. 5,0pt

DICAS:

- i) considere que estão sendo registradas as posições da partícula em cada instante de tempo, e que a probabilidade do “registro” da partícula pode ser descrita como $\frac{dt}{T}$, onde T é seu tempo total de “voo”;
- ii) utilize um referencial fixo apontando para baixo, com a origem no ponto de onde a partícula começa a cair.

- c.** Escreva a função de onda de matéria associada ao movimento de queda livre da partícula. Verifique que a probabilidade de encontrar a partícula durante a queda, entre $y = h$ e $y = 0$ é igual a 1, ou seja, há certeza total de que, ao longo do tempo T , a partícula estará nesse intervalo de coordenadas. 2,0pt