OLIMPÍADA BRASILEIRA DE FÍSICA

Prova Seletiva 2 - SOIF / 2025

14 de dezembro de 2024

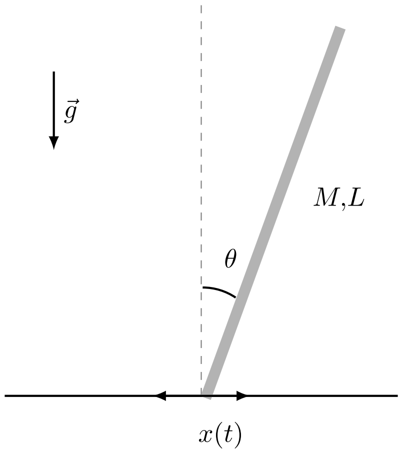
INSTRUÇÕES

1. A prova é composta por 5 questões. Sem contar essa folha de rosto, ela contém 7 páginas.
2. A duração da prova é de 5 horas ininterruptas. **O tempo de prova começa no instante de acesso ao caderno de questões.**
3. **Todas as respostas devem ser justificadas**, ou seja, a resolução da questão compreendida pelas principais etapas que levam às respostas deve ser apresentada.
4. **As resoluções devem escritas de próprio punho** em folhas inicialmente em branco (não use editores de texto). É permitido apenas o uso de caneta, de cor **azul ou preta**, lápis preto de traço forte, régua e calculadora **não programável**.
5. As folhas com a resolução de cada questão devem ser escaneadas no formato PDF. Um documento PDF (documento resposta) para cada questão.
6. Cada documento resposta deve ser enviado (submetido) através da correspondente interface de respostas em `https://app.graxaim.org/soif/2025`.
7. Quando um documento resposta é enviado a questão é considerada respondida. Não é possível enviar um documento para substituir outro já enviado.
8. Você pode responder as questões (enviar os documentos) em qualquer ordem. **Atenção para não enviar o documento resposta de uma questão no lugar de outra.**
9. Durante a prova, é permitido o uso de celular ou computador **apenas** para acessar o site `https://app.graxaim.org/soif/2025`, ou para trocas de mensagens com os coordenadores da SOIF através do endereço equipeobf@graxaim.org. **Todos os demais usos (aplicativos gráficos e numéricos, consultas, busca na internet, etc) são proibidos.**
10. Questões enviadas após do 5 horas do início da prova (acesso ao caderno de questões) não serão avaliadas, apesar do sistema aceitar a submissão normalmente.

Q1 - Equilibrando um cabo de vassoura (10 pontos)

Considere que um cabo de vassoura pode ser modelado como barra homogênea de comprimento L e massa M, mantido verticalmente sobre uma superfície horizontal áspera (como uma mão), apoiada em seu ponto mais baixo. A barra está inicialmente em repouso e inclinada de um pequeno ângulo θ_0 com relação à direção vertical e começa a cair sob a influência da gravidade g.

Para evitar que a barra caia, pode-se movimentar horizontalmente a superfície áspera e controlar a posição horizontal $x(t)$ da base do cabo para corrigir pequenos desvios angulares e manter o equilíbrio vertical da barra. A situação está representada na figura a seguir.



Inicialmente, considere o caso mais simples, no qual o ponto de apoio da barra é mantido em repouso, i.e., a função $x(t)$ é constante.

a.	Determine a equação do movimento da barra em função do ângulo $\theta(t)$ quando o ponto de apoio da barra é mantido em repouso.	2,0pt

b.	Na situação do item anterior, determine o tempo τ_2 necessário para o ângulo atingir a inclinação $\theta(\tau_2) = 2\theta_0$.	3,0pt

A partir do próximo item, discutiremos algumas características da função $x(t)$ que possibilitem equilibrar a barra.

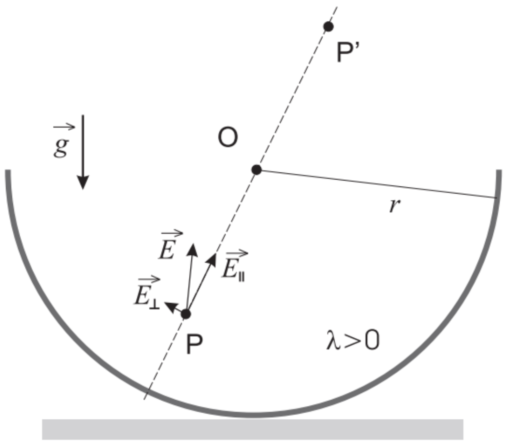
c.	Determine uma condição que a função $x(t)$ deve satisfazer para que a inclinação da barra não aumente.	2,0pt

Suponha agora a presença de uma pequena resistência do ar, cujo efeito só pode ser percebido após um tempo de observação suficientemente longo. Considere ainda que a posição da base da barra seja controlada por uma função oscilatória da forma $x(t) = -x_0 \cos(\omega_1 t)$.

d.	Supondo que x_0 e ω_1 são ajustados a fim de garantir a estabilidade da barra, encontre a amplitude das oscilações angulares que podem ser observadas na barra após um intervalo de tempo muito longo.	3,0pt

Q2 - Pêndulo em uma semicircunferência carregada (10 pontos)

Uma carga elétrica é distribuída uniformemente, com densidade linear $\lambda > 0$, ao longo de uma semicircunferência com centro em O, e raio r, mantida fixa num plano vertical, conforme a figura abaixo.



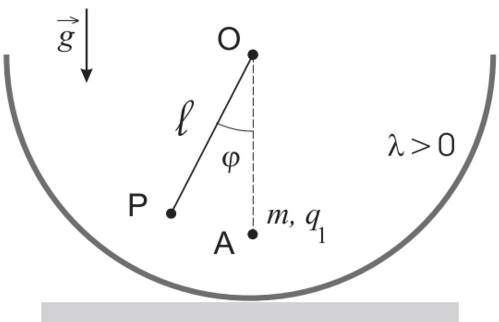
Seja $\vec{E}(P)$ o campo elétrico dado pela distribuição de carga no ponto P do plano mostrado na figura e seja

$$\vec{E} = \vec{E}_{||} + \vec{E}_{\perp},$$

a decomposição do campo em componentes paralelos e ortogonais em comparação com a linha OP.

a.	Seja P' é o ponto simétrico de P em relação ao centro O da circunferência. Demonstre que $$\vec{E}_{\perp}(P') = \vec{E}_{\perp}(P).$$	2,0pt

Um pêndulo está pendurado em um pino O que coincide com o centro do semicírculo. O pêndulo é composto por uma pequena esfera de massa m e carga elétrica q_1, fixada a um fio inextensível e de massa desprezível, de comprimento $l < r$, conforme mostrado na figura. Queremos determinar a força restauradora quando o pêndulo é movido da posição de equilíbrio por um pequeno ângulo φ até o ponto P. Para maior clareza, na figura a seguir mostra o ângulo φ com uma amplitude muito maior que a real.



b.	Mostre que, na situação descrita, o módulo da componente perpendicular ao fio, do campo elétrico em P, pode ser expresso como $\alpha\varphi$, onde α é uma constante. Determine a expressão de α.	3,0pt

Considere que o período das oscilações desse pêndulo, no caso em que a semi-circunferência não esteja carregada, é $T_0 = 1$ s. Quando a esfera é carregada, há uma modificação do período de oscilação do pêndulo.

c.	Determine o período T, de pequenas oscilações do pêndulo com $q_1 < 0$.	2,0pt

Na condição vista até aqui, $|m\vec{g}| > |q_1\vec{E}_A|$, garante que no ponto A exista uma posição de equilíbrio estável. Suponha agora que a esfera do pêndulo é carregada até $q_2 > 0$, tal que $|q_2| > |q_1|$. Nesse caso, pode acontecer que $|m\vec{g}| < |q_2\vec{E}_A|$, e que, A não seja mais um ponto de equilíbrio estável do sistema, passando a ser, esta nova posição, o ponto A', diametralmente oposto ao ponto A. Se sabemos que essa nova configuração é possível com $q_2 = 2q_1$.

d.	Encontre uma expressão para a constante α, em função de q_1, m e g, para que o novo período de oscilação, em torno da nova posição de equilíbrio, T', seja igual ao anterior, T.	3,0pt

Q3 - MRU e MRUV relativísticos. (10 pontos)

Parte I - Movimento relativo entre SRI's

As transformações de Lorentz para o espaço-tempo entre dois sistemas de referência inerciais (SRI) que se movem com uma velocidade relativa v constante entre si podem ser descritas pelas seguintes equações:

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$
$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z,$$

ou, em representação matricial:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Considere três referenciais inerciais S, S' e S''. O referencial inercial S' move-se com velocidade constante v_1 em relação ao referencial S. O referencial S'', por sua vez, move-se com velocidade constante v_2, em relação ao referencial S', ambas velocidades na direção x.

a.	Encontre a expressão para a velocidade v_3, do referencial S'' em relação ao referencial S.	3,0pt

Observação: Não serão aceitas respostas sem demonstração.

Parte II. Movimento retilíneo uniformemente acelerado relativístico

Na teoria da relatividade é tradicional o uso de quadrivetores. Existem quadrivetores "contravariantes"e "covariantes", nesta questão dispensaremos aspectos específicos relativos a estas denominações, apenas, em relação à notação, um quadrivetor covariante pode ser representado como

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, \vec{x})$$

e um quadrivetor contravariante,

$$x^\mu = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3) = (x_0, -\vec{x}).$$

Os subíndices i na variável x_i representam as direções do espaço tridimensional convencional. A coordenada x_0 do quadrivetor é a coordenada temporal $x_0 = ct$. No que segue, usaremos apenas esta notação, sem entrar em pontos mais específicos dessa distinção.

Associado ao vetor velocidade $\vec{v}$, de coordenadas $v_\alpha = \dfrac{dx_\alpha}{dt}$, $\alpha = 1, 2, 3$, podemos definir quadrivetor velocidade, ou quadrivelocidade, $u_\alpha = \dfrac{dx_\alpha}{d\tau}$, com $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

b.	Demonstre que a quadrivelocidade pode ser expressa pelas seguintes expressões: $$u_\alpha = \gamma v_\alpha = \gamma(c, \vec{v}) = \gamma(c, v_x, v_y, v_z).$$	2,0pt

Define-se o movimento relativístico uniformemente acelerado, aquele em que a aceleração a_x no referencial próprio (em cada instante de tempo) permanece constante em cada instante. O referencial próprio do móvel é aquele no qual a sua velocidade é nula. Nesta última parte da questão, você pode assumir que o movimento é unidimensional. O quadrivetor aceleração, ou quadriaceleração, é definido como

$$a_\alpha = \frac{d^2 x_\alpha}{d\tau^2} = \frac{du_\alpha}{d\tau}.$$

c.	Em função das informações acima, escreva o quadrivetor aceleração para este sistema, em termos de γ, v e $\dot{v}$.	3,0pt

O produto interno entre dois quadrivetores, x^μ e y_μ, é definido como a soma dos produtos de suas componentes correspondentes, considerando o sinal apropriado para os componentes espaciais. Com a notação $x_\mu = (x_0, \vec{x})$ e $x^\mu = (x_0, -\vec{x})$, o produto interno pode ser escrito como:

$$x^\mu y_\mu = x_0 y_0 - \vec{x} \cdot \vec{y},$$

em que x_0 e y_0 são as componentes escalares, enquanto $\vec{x}$ e $\vec{y}$ representam os vetores espaciais associados.

d. Mostre que o movimento uniformemente variado relativístico satisfaz a condição (2,0pt)

$$a^\alpha a_\alpha = C,$$

em que C é uma constante. Determine ainda o valor de C.

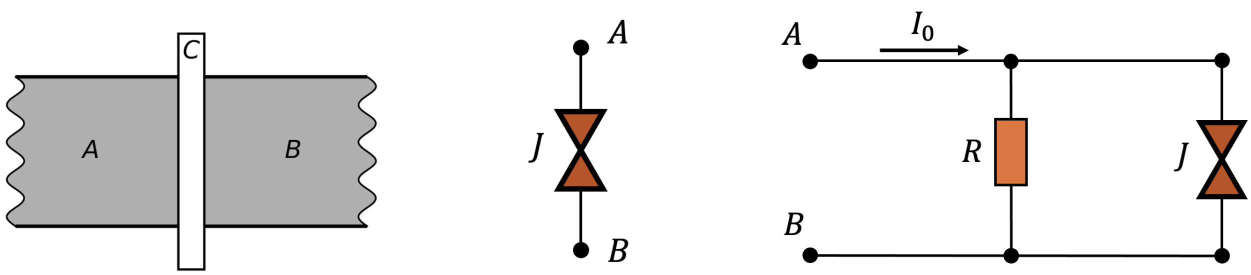
Q4 - A Junção de Josephson (10 pontos)

Neste problema, estudaremos a *Junção Josephson*, um dispositivo fundamental na física da supercondutividade. A Junção Josephson consiste de duas camadas supercondutoras, separadas por uma barreira isolante finíssima, que permite a passagem de corrente elétrica (por tunelamento quântico!), veja a Fig.1a. Neste problema, estudaremos como este dispositivo interage com resistências, num circuito elétrico.

Cada Junção Josephson é definida por 3 parâmetros. Duas constantes, uma corrente máxima I_C e uma "indutância" L; e um ângulo variável $\phi(t)$, a diferença de fase entre as duas camadas supercondutoras da junção. Dado esses parâmetros, a corrente I_{AB} e a voltagem V_{AB} na junção satisfazem as duas equações de Josephson:

$$I_{AB} = I_C \sin\phi, \quad V_{AB} = L\frac{d\phi}{dt} \tag{1}$$

Estudaremos a junção como um componente do circuito eletrico da Fig.1c, onde um resistor, a junção J e uma fonte de corrente fixa I_0 estão em paralelo.



(a) Um esquema da junção J. (b) O símbolo da junção J. (c) O circuito RJ.

Figura 1: (a) Um diagrama da junção J, entre duas faces supercondutoras A, B. (b) O símbolo de J como um componente elétrico. (c) Um circuito com um resistor, a junção, e uma fonte de corrente em paralelo.

a. Encontre uma equação diferencial (não linear) para a diferença de fase $\phi(t)$ da junção do circuito da Figura 1c. Dê sua resposta em funcao de R, L, I_C, I_0 e ϕ. 1,0pt

Agora, vamos analizar a dinâmica do circuito. Curiosamente, veremos que sua dinâmica depende bastante do sinal de $I_0 - I_C$. No restante dessa prova considere que estamos observando o sistema após um tempo suficientemente longo t, tal que não temos mais efeitos transientes no sistema.

b. Assumindo que $I_C \geq I_0$, encontre uma solucao para $\phi(t)$. 2.0pt

c. Assumindo que $I_C < I_0$, encontre $\phi(t)$, em função de I_C, I_0, L, R. Você pode querer usar a integral imprópria: 3.0pt

$$\int \frac{dx}{1 - \alpha\sin(x)} = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \arctan\left(\frac{\tan(x/2) - \alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right), \text{ onde } \alpha < 1. \tag{2}$$

d. Usando suas respostas da parte **b, c**, calcule o valor médio da voltagem $\langle V_{AB}\rangle$ (definida abaixo), em função de R, I_0, I_C. Faça um esboço de $\langle V_{AB}\rangle$ conforme I_0 varia. 4,0pt

$$\langle V_{AB}\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt \cdot V_{AB}(t) \tag{3}$$

Q5 - Partícula confinada num poço carregado (10 pontos)

Considere uma partícula de massa m e carga $q > 0$ confinada em um poço de potencial quadrado unidimensional na região $0 < x < L$. Nesse problema, discutiremos a relação entre o comprimento de onda de de Broglie λ da partícula com as autoenergias desse sistema em diferentes condições.

Inicialmente, a partícula não está sujeita a nenhuma força, a não ser a de confinamento.

a.	Quais os possíveis valores apresentados nos estados estacionários do produto $k_n \cdot L$, em que $k_n = \dfrac{2\pi}{\lambda_n}$ são os possíveis valores números de onda associados à partícula em estados estacionários?	2,0pt

b.	Determine as autoenergias E_n que podem ser apresentados pela partícula nos seus estados estacionários. Deixe sua resposta em termos da constante de Planck h, massa m e largura de poço L.	1,0pt

Posteriormente, as paredes do poço são carregadas e um campo elétrico uniforme $\mathcal{E}\hat{x}$ é estabelecido ao longo do poço.

c.	Calcule qual a energia potencial $U(x)$ adicional que deve ser considerada para representar o efeito do campo elétrico uniforme aplicado ao longo do poço. O ponto $x = 0$ como a sua referência de energia potencial.	1,0pt

No caso de partículas confinadas em uma região do espaço de energia potencial não constante, é possível definir um valor do comprimento de onda de de Broglie local $\lambda(x)$ para partículas com uma energia total E.

d.	Determine o número de onda local associado à partícula em função da sua posição x: $$k(x) = \frac{2\pi}{\lambda(x)}.$$	2,0pt

e.	Apresente a equação algébrica que deve ser satisfeita pelos novos autovalores E_n do sistema para estabelecer ondas estacionárias no poço com presença do campo elétrico $\mathcal{E} \neq 0$.	3,0pt

f.	Faça esboços de duas autofunções $\psi_n(x)$ distintas no poço com presença do campo elétrico $\mathcal{E} \neq 0$. Indique aspectos qualitativos relevantes das autofunções.	1,0pt