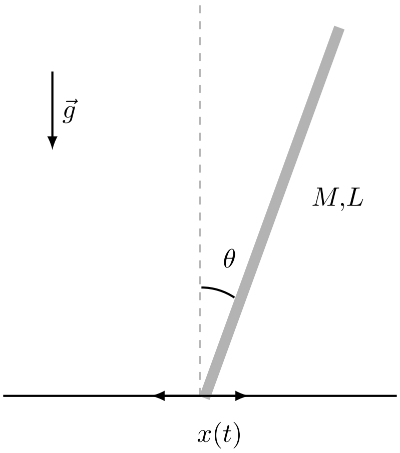
Q1 - Equilibrando um cabo de vassoura (10 pontos)

Considere que um cabo de vassoura pode ser modelado como barra homogênea de comprimento L e massa M, mantido verticalmente sobre uma superfície horizontal áspera (como uma mão), apoiada em seu ponto mais baixo. A barra está inicialmente em repouso e inclinada de um pequeno ângulo θ_0 com relação à direção vertical e começa a cair sob a influência da gravidade g.

Para evitar que a barra caia, pode-se movimentar horizontalmente a superfície áspera e controlar a posição horizontal $x(t)$ da base do cabo para corrigir pequenos desvios angulares e manter o equilíbrio vertical da barra. A situação está representada na figura a seguir.



Inicialmente, considere o caso mais simples, no qual o ponto de apoio da barra é mantido em repouso, i.e., a função $x(t)$ é constante.

a.	Determine a equação do movimento da barra em função do ângulo $\theta(t)$ quando o ponto de apoio da barra é mantido em repouso.	2,0pt

b.	Na situação do item anterior, determine o tempo τ_2 necessário para o ângulo atingir a inclinação $\theta(\tau_2) = 2\theta_0$.	3,0pt

A partir do próximo item, discutiremos algumas características da função $x(t)$ que possibilitem equilibrar a barra.

c.	Determine uma condição que a função $x(t)$ deve satisfazer para que a inclinação da barra não aumente.	2,0pt

Suponha agora a presença de uma pequena resistência do ar, cujo efeito só pode ser percebido após um tempo de observação suficientemente longo. Considere ainda que a posição da base da barra seja controlada por uma função oscilatória da forma $x(t) = -x_0 \cos(\omega_1 t)$.

d.	Supondo que x_0 e ω_1 são ajustados a fim de garantir a estabilidade da barra, encontre a amplitude das oscilações angulares que podem ser observadas na barra após um intervalo de tempo muito longo.	3,0pt

Gabarito:

a.	Determine a equação do movimento da barra em função do ângulo $\theta(t)$ quando $x(t)$ é constante.	2,0pt

Para obter a equação do movimento da barra, precisamos considerar o torque gerado pela força da gravidade em torno da base da barra. A barra, de massa M e comprimento L, experimenta um torque devido ao peso Mg aplicado no seu centro de massa, localizado a $L/2$ da base. O torque τ é dado por:

$$\tau = \frac{MgL}{2}\sin(\theta)$$

A equação do movimento para a barra é baseada na segunda lei de Newton para rotação:

$$I\ddot{\theta} = \tau$$

onde $I = \frac{1}{3}ML^2$ é o momento de inércia de uma barra de comprimento L e massa M em torno da sua base. Substituindo τ e I, obtemos:

$$\frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta} = \frac{MgL}{2}\sin(\theta)$$

Para pequenos ângulos, podemos aproximar $\sin(\theta) \approx \theta$, o que resulta na equação diferencial:

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\theta = 0$$

Esta é a equação do movimento da barra, que descreve um movimento oscilatório instável quando $x(t)$ é constante.

Marking Scheme:

- Cálculo de torque (0,5 pt)
- 2^a lei de Newton para rotações (0,5 pt)
- Resposta final (1,0 pt)

b. Na situação do item anterior, determine o tempo τ_2 necessário para o ângulo atingir a inclinação $\theta(\tau_2) = 2\theta_0$. 2,0pt

A equação diferencial obtida no item (a) é do tipo harmônico simples, com solução geral:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{\lambda t}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

onde λ é a taxa de crescimento exponencial devido à instabilidade do sistema. Queremos encontrar o tempo τ_2 para o qual $\theta(\tau_2) = 2\theta_0$, ou seja:

$$2\theta_0 = \theta_0 e^{\lambda\tau_2}$$

Cancelando θ_0 em ambos os lados e resolvendo para τ_2:

$$e^{\lambda\tau_2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Substituindo o valor de λ, obtemos:

$$\tau_2 = \frac{\ln(2)}{\sqrt{\frac{3g}{2L}}}$$

Marking Scheme:

- Solução da equação diferencial (1,0 pt)
- Valor de τ_2 (1,0 pt)

c. Determine uma condição que a função $x(t)$ deve satisfazer para que a inclinação da barra diminua. 3,0pt

Para evitar que a inclinação da barra aumente, é necessário que o movimento da base $x(t)$ compense a inclinação. Para que esse efeito ocorra, é preciso haver uma aceleração a do ponto de apoio $x(t)$ na direção da barra inclinada. Adotando a base da barra como um referencial não inercial, surge uma força fictícia de Einstein, aplicada no centro de massa da barra.

Fazendo o equilíbrio de torques com respeito à base da barra, temos que:

$$Ma\frac{L}{2}\cos\theta = Mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

Para pequenos ângulos, podemos usar as aproximações $\cos\theta \approx 1$ e $\sin\theta \approx \theta$. Assim, a equação se simplifica para:

$$a\frac{L}{2} = g\theta\frac{L}{2}$$

Cancelando $\frac{L}{2}$ em ambos os lados, obtemos a condição para que a inclinação permaneça estável:

$$a = g\theta$$

Quando essa igualdade é satisfeita, a inclinação da barra não aumenta. Para que a inclinação da barra diminua devemos satisfazer a condição

$$a > g\theta.$$

Marking Scheme:

- Torque gerado pela força de Einstein (1,0 pt)
- Aproximação para ângulos pequenos (1,0 pt)
- Resposta final correta (1,0 pt)

d.	Supondo que x_0 e ω_1 são ajustados a fim de garantir a estabilidade da barra, encontre a amplitude das oscilações angulares que podem ser observadas na barra após um intervalo de tempo muito longo.	3,0pt

Equação de movimento em função da aceleração A do ponto de apoio com aproximação de ângulos pequeno:

$$Mg\frac{L}{2}\theta - MA\frac{L}{2} = \frac{ML^2}{3}\theta''$$

O valor da aceleração $A = x_0\omega_1^2 cos(\omega_1 t)$ pode ser encontrado diretamente e substituído na equação. A força inercial atua como um termo forçante na equação do oscilador. A equação de movimento na situação descrita é dada por

$$\theta'' - \frac{3g}{2L}\theta = -x_0\omega_1^2\frac{3}{2L}cos(\omega_1 t).$$

A amplitude solicitada pode ser encontrada procurando soluções dessa equação diferencial do tipo $\theta(t) = \theta_A cos(\omega_1 t)$, o que nos leva a uma equação algébrica simples para o parâmetro θ_A, cuja solução é dada por

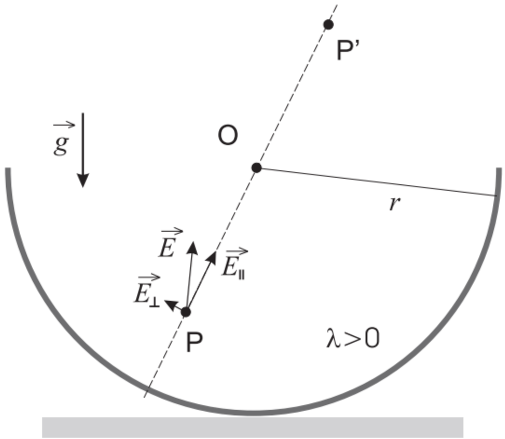
$$\theta_A = \frac{x_0}{g}\frac{\omega_1^2\omega_0^2}{\omega_1^2 + \omega_0^2}$$

Marking Scheme:

- Equação do oscilador harmônico forçado (1,0 pt)
- Cálculo de $A(t)$ (0,5 pt)
- Busca de soluções do tipo $\theta(t) = \theta_A cos(\omega_1 t)$ (0,5 pt)
- Valor de θ_A (1,0 pt)

Q2 - Pêndulo em uma semicircunferência carregada (10 pontos)

Uma carga elétrica é distribuída uniformemente, com densidade linear $\lambda > 0$, ao longo de uma semicircunferência com centro em O, e raio r, mantida fixa num plano vertical, conforme a figura abaixo.



Seja $\vec{E}(P)$ o campo elétrico dado pela distribuição de carga no ponto P do plano mostrado na figura e seja

$$\vec{E} = \vec{E}_{||} + \vec{E}_{\perp},$$

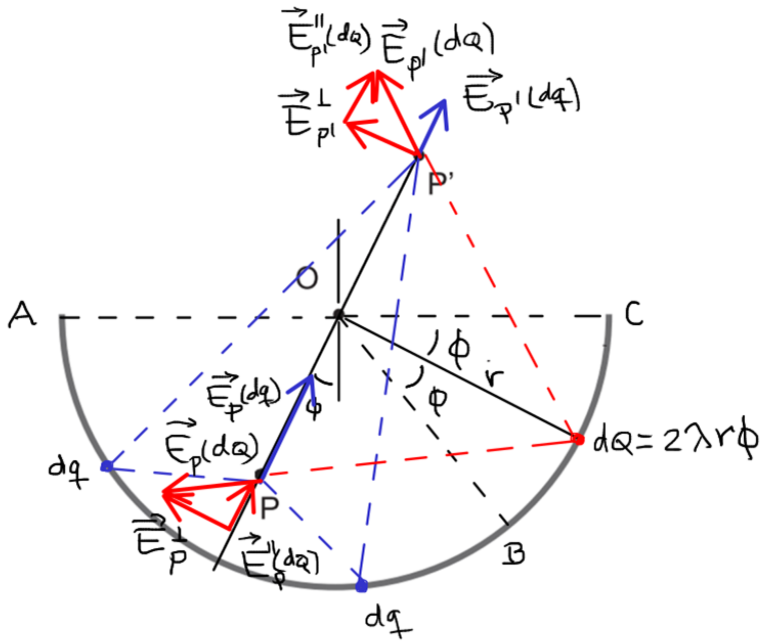
a decomposição do campo em componentes paralelos e ortogonais em comparação com a linha OP.

a.	Seja P' é o ponto simétrico de P em relação ao centro O da circunferência. Demonstre que $$\vec{E}_{\perp}(P') = \vec{E}_{\perp}(P).$$	2,0pt

Gabarito:

a) Se dividimos o semicírculo em duas partes, a primeira, AB, simétrica em relação à direção OP, e uma segunda parte, BC. O campo produzido no ponto P', assim como em P, devido à distribuição de carga no arco AB, por simetria, está dirigido ao longo da direção OP. Isto é, a carga do arco AB pode ser considerada como duas cargas pontuais dq, situadas à mesma distância do ponto P'. Então, o campo produzido em P' é o campo resultante destas duas cargas.

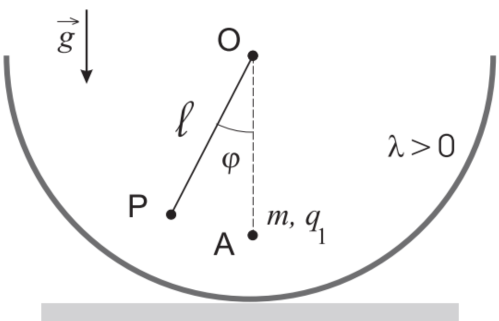
Dessa forma, a carga distribuída no arco BC, $dQ = 2\lambda r\phi$, é a responsável pelas componentes dos campos perpendiculares à direção OP, que terão o mesmo módulo, por simetria, ver figura abaixo.



Marking Scheme:

- 1,0 por estabelecer que E em P e P' é criado por $2\lambda r\varphi$ (simetria), ou método equivalente.
- 1,0 por chegar à igualdade desejada.

Um pêndulo está pendurado em um pino O que coincide com o centro do semicírculo. O pêndulo é composto por uma pequena esfera de massa m e carga elétrica q_1, fixada a um fio inextensível e de massa desprezível, de comprimento $l < r$, conforme mostrado na figura. Queremos determinar a força restauradora quando o pêndulo é movido da posição de equilíbrio por um pequeno ângulo φ até o ponto P. Para maior clareza, na figura a seguir mostra o ângulo φ com uma amplitude muito maior que a real.

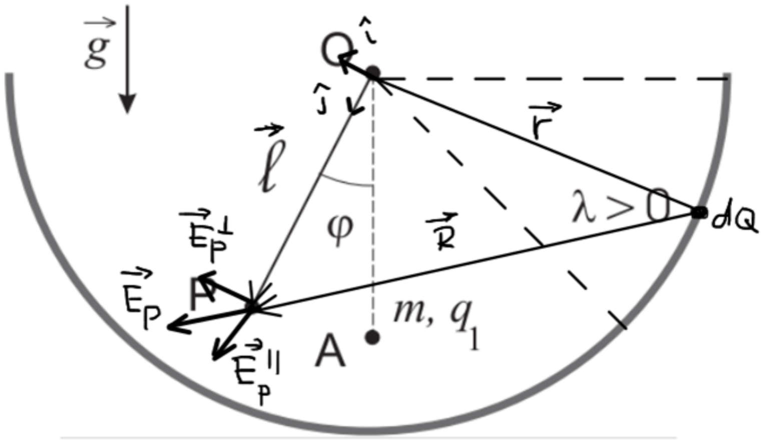


b. Mostre que, na situação descrita, o módulo da componente perpendicular ao fio, do campo elétrico em P, pode ser expresso como $\alpha\varphi$, onde α é uma constante. Determine a expressão de α. 3,0pt

Gabarito:

b) Na figura a seguir, o raio vetor $\vec{R} = \vec{r} + \vec{l} = r\hat{\imath} + l\hat{\jmath}$ e a carga dQ, definem o campo

$$\vec{E}_P(dQ) = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\hat{\imath} + l\hat{\jmath}}{(r^2 + l^2)^{3/2}}$$



Daí, a componente perpendicular é

$$\vec{E}_P^{\perp}(dQ) = \frac{2\lambda r\varphi}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\hat{\imath}}{(r^2+l^2)^{3/2}}$$

O módulo é dado por

$$E_P^{\perp}(dQ) = \frac{\lambda\varphi}{2\pi\epsilon_0}\frac{r^2}{(r^2+l^2)^{3/2}} = \alpha\varphi$$

onde

$$\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{r^2}{(r^2+l^2)^{3/2}}.$$

Marking Scheme:

- 1,0 pelo campo vetorial.
- 1,0 pela componente perpendicular do campo.
- 1,0 pela expressão final com α.

Considere que o período das oscilações desse pêndulo, no caso em que a semi-circunferência não esteja carregada, é $T_0 = 1$ s. Quando a esfera é carregada, há uma modificação do período de oscilação do pêndulo.

c.	Determine o período T, de pequenas oscilações do pêndulo com $q_1 < 0$.	2,0pt

Gabarito:

c) A equação de movimento do corpo é dada por:

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -(mg-\alpha q)\varphi \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\frac{mg-\alpha q}{ml}\right)\varphi = 0$$

A frequência angular é dada pela equação

$$\omega = \sqrt{\frac{mg-\alpha q}{ml}} = \sqrt{\frac{g}{l}-\frac{\alpha q}{ml}} = \sqrt{\omega_0^2-\frac{\alpha q}{ml}} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{T_0^2}-\frac{\alpha q}{ml}}$$

Finalmente

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{4\pi^2 - \frac{\alpha q}{ml}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha q}{4\pi^2 ml}}}$$

Marking Scheme:

- 1,0 pela equação do movimento.
- 1,0 pela expressão do período.

Na condição vista até aqui, $|m\vec{g}| > |q_1\vec{E}_A|$, garante que no ponto A exista uma posição de equilíbrio estável. Suponha agora que a esfera do pêndulo é carregada até $q_2 > 0$, tal que $|q_2| > |q_1|$. Nesse caso, pode acontecer que $|m\vec{g}| < |q_2\vec{E}_A|$, e que, A não seja mais um ponto de equilíbrio estável do sistema, passando a ser, esta nova posição, o ponto A', diametralmente oposto ao ponto A. Se sabemos que essa nova configuração é possível com $q_2 = 2q_1$.

d. Encontre uma expressão para a constante α, em função de q_1, m e g, para que o novo período de oscilação, em torno da nova posição de equilíbrio, T', seja igual ao anterior, T. 3,0pt

Gabarito:

d) Temos que

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -(\alpha q_2 - mg)\varphi \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\frac{\alpha q_2 - mg}{ml}\right)\varphi = 0$$

$$\omega_2^2 = \frac{\alpha q_2 - mg}{ml} = \omega_1^2 = \frac{mg - \alpha q_1}{ml}$$

$$\alpha(q_1 + q_2) = 3\alpha q_1 = 2mg \rightarrow \alpha = \frac{2}{3}\frac{mg}{q_1}$$

Marking Scheme:

- 1,0 pela equação do movimento.
- 1,0 pela igualdade das frequências.
- 1,0 pela expressão final.

Q3 - MRU e MRUV relativísticos. (10 pontos)

Parte I - Movimento relativo entre SRI's

As transformações de Lorentz para o espaço-tempo entre dois sistemas de referência inerciais (SRI) que se movem com uma velocidade relativa v constante entre si podem ser descritas pelas seguintes equações:

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z,$$

ou, em representação matricial:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Considere três referenciais inerciais S, S' e S''. O referencial inercial S' move-se com velocidade constante v_1 em relação ao referencial S. O referencial S'', por sua vez, move-se com velocidade constante v_2, em relação ao referencial S', ambas velocidades na direção x.

a.	Encontre a expressão para a velocidade v_3, do referencial S'' em relação ao referencial S.	3,0pt

Observação: Não serão aceitas respostas sem demonstração.

Gabarito:

a)

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\beta_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2\beta_2 & 0 & 0 \\ -\gamma_2\beta_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2\beta_2 & 0 & 0 \\ -\gamma_2\beta_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\beta_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dai...

$$\begin{pmatrix} \gamma_3 & -\gamma_3\beta_3 & 0 & 0 \\ -\gamma_3\beta_3 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2\beta_2 & 0 & 0 \\ -\gamma_2\beta_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\beta_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim...

$$\gamma_3 = \gamma_2\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2 = \gamma_2\gamma_1(1 + \beta_1\beta_2)$$

e

$$\gamma_3\beta_3 = \gamma_2\beta_2\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2\beta_1 = \gamma_2\gamma_1(\beta_2 + \beta_1)$$

Multiplicando a equação de cima por β_3 e igualenado com a segunda...

$$\beta_3\gamma_2\gamma_1(1+\beta_1\beta_2) = \gamma_2\gamma_1(\beta_2+\beta_1) \Rightarrow \beta_3 = \frac{\beta_2+\beta_1}{1+\beta_1\beta_2}$$

Sabendo que $\beta_i = \frac{v_i}{c}$, substituindo...

$$v_3 = \frac{v_2+v_1}{1+v_1v_2}$$

Marking Scheme:

- 1,0 pelas expressões matriciais das transformações de referenciais
- 1,0 pelas equações de γ_3 (1,0) e $\gamma_3\beta_3$ (1,0)
- 1,0 pela expressão final de v_3

Parte II. Movimento retilíneo uniformemente acelerado relativístico

Na teoria da relatividade é tradicional o uso de quadrivetores. Existem quadrivetores "contravariantes"e "covariantes", nesta questão dispensaremos aspectos específicos relativos a estas denominações, apenas, em relação à notação, um quadrivetor covariante pode ser representado como

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, \vec{x})$$

e um quadrivetor contravariante,

$$x^\mu = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3) = (x_0, -\vec{x}).$$

Os subíndices i na variável x_i representam as direções do espaço tridimensional convencional. A coordenada x_0 do quadrivetor é a coordenada temporal $x_0 = ct$. No que segue, usaremos apenas esta notação, sem entrar em pontos mais específicos dessa distinção.

Associado ao vetor velocidade $\vec{v}$, de coordenadas $v_\alpha = \dfrac{dx_\alpha}{dt}$, $\alpha = 1, 2, 3$, podemos definir quadrivetor velocidade, ou quadrivelocidade, $u_\alpha = \dfrac{dx_\alpha}{d\tau}$, com $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

b. Demonstre que a quadrivelocidade pode ser expressa pelas seguintes expressões: 2,0pt

$$u_\alpha = \gamma v_\alpha = \gamma(c,\vec{v}) = \gamma(c, v_x, v_y, v_z).$$

Gabarito:

b)

$$u_\alpha = \frac{dx_\alpha}{d\tau} = \frac{dx_\alpha}{dt}\frac{dt}{d\tau}$$

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma$$

Então, substituindo:

$$u_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma v_\alpha$$

Marking Scheme:

- 1,0 pt pela expressão de u_α
- 1,0 pt pelo resultado final

Define-se o movimento relativístico uniformemente acelerado, aquele em que a aceleração a_x no referencial próprio (em cada instante de tempo) permanece constante em cada instante. O referencial próprio do móvel é aquele no qual a sua velocidade é nula. Nesta última parte da questão, você pode assumir que o movimento é unidimensional. O quadrivetor aceleração, ou quadriaceleração, é definido como

$$a_\alpha = \frac{d^2 x_\alpha}{d\tau^2} = \frac{du_\alpha}{d\tau}.$$

c. Em função das informações acima, escreva o quadrivetor aceleração para este sistema, em termos de γ, v e $\dot{v}$. 3,0pt

Gabarito:

$$a^\alpha = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{du^\alpha}{d\tau} = \frac{du^\alpha}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{du^\alpha}{dt}$$

Se

$$\alpha = 0 \Rightarrow \frac{du^0}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma c) = c\frac{d\gamma}{dt} = c\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

$$a^0 = \frac{du^0}{dt} = c\frac{d}{dt}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \ldots = \frac{1}{c}\frac{v\cdot\dot{v}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

Se

$$\alpha = 1{,}2{,}3 \Rightarrow \frac{du^\alpha}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma v^\alpha) = \frac{d\gamma}{dt}v^\alpha + \gamma\frac{dv^\alpha}{dt} = \frac{v}{c^2}\frac{v\cdot\dot{v}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} + \frac{\dot{v}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

Finalmente

$$a^\alpha = \frac{du^\alpha}{d\tau} = \gamma\frac{du^\alpha}{dt} = \gamma\left(\frac{v}{c^2}\frac{v\cdot\dot{v}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} + \frac{\dot{v}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right)$$

Marking Scheme:

- 1,0 pt por desenvolvimento correto de a_α em termos de t.
- 1,0 pt pelo resultado final da componente $\alpha = 0$.
- 1,0 pt pelo resultado final da componente $\alpha = 1{,}2{,}3$.

O produto interno entre dois quadrivetores, x^μ e y_μ, é definido como a soma dos produtos de suas componentes correspondentes, considerando o sinal apropriado para os componentes espaciais. Com a notação $x_\mu = (x_0, \vec{x})$ e $x^\mu = (x_0, -\vec{x})$, o produto interno pode ser escrito como:

$$x^\mu y_\mu = x_0 y_0 - \vec{x}\cdot\vec{y},$$

em que x_0 e y_0 são as componentes escalares, enquanto $\vec{x}$ e $\vec{y}$ representam os vetores espaciais associados.

d. Mostre que o movimento uniformemente variado relativístico satisfaz a condição 2,0pt

$$a^\alpha a_\alpha = C,$$

em que C é uma constante. Determine ainda o valor de C.

Gabarito:

Do item anterior, temos que

$$a^\alpha = \frac{du^\alpha}{d\tau} = \gamma \frac{du^\alpha}{dt} = \gamma \left(\frac{v}{c^2} \frac{v \cdot \dot{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} + \frac{\dot{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right)$$

.

Adotando o referencial solidário ao corpo:

$$\dot{v} = \dot{v}_x = a_x = a_0$$

e $v = 0$, a velocidade instantânea no referencial próprio, portanto:

$$a^\alpha = (0, -a_x, -a_y, -a_z) = (0, -a_0, 0, 0)$$

Então

$$a_\alpha = (0, a_0, 0, 0) \Rightarrow a^\alpha a_\alpha = -a_0^2 = C$$

Marking Scheme:

- 1,0 pt por desenvolvimento algébrico em refernecial genérico ou por escolha do referencial solidário ao corpo.
- 1,0 pt pelo resultado final

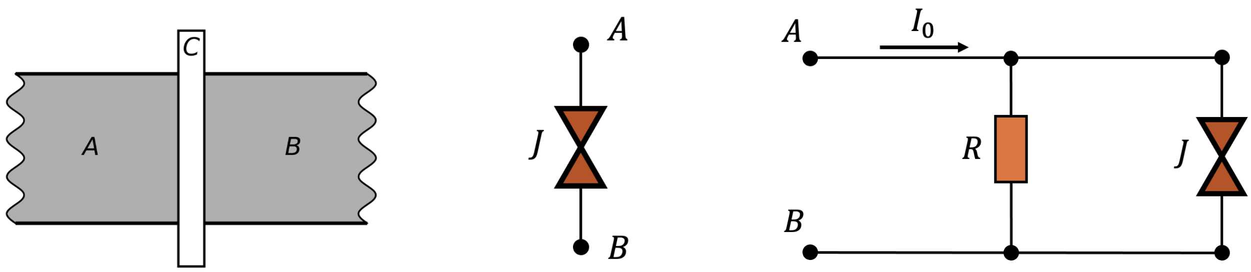
Q4 - A Junção de Josephson (10 pontos)

Neste problema, estudaremos a *Junção Josephson*, um dispositivo fundamental na física da supercondutividade. A Junção Josephson consiste de duas camadas supercondutoras, separadas por uma barreira isolante finíssima, que permite a passagem de corrente elétrica (por tunelamento quântico!), veja a Fig.1a. Neste problema, estudaremos como este dispositivo interage com resistências, num circuito elétrico.

Cada Junção Josephson é definida por 3 parâmetros. Duas constantes, uma corrente máxima I_C e uma "indutância" L; e um ângulo variável $\phi(t)$, a diferença de fase entre as duas camadas supercondutoras da junção. Dado esses parâmetros, a corrente I_{AB} e a voltagem V_{AB} na junção satisfazem as duas equações de Josephson:

$$I_{AB} = I_C \sin\phi, \quad V_{AB} = L\frac{d\phi}{dt} \tag{1}$$

Estudaremos a junção como um componente do circuito eletrico da Fig.1c, onde um resistor, a junção J e uma fonte de corrente fixa I_0 estão em paralelo.



(a) Um esquema da junção J. (b) O símbolo da junção J. (c) O circuito RJ.

Figura 1: (a) Um diagrama da junção J, entre duas faces supercondutoras A, B. (b) O símbolo de J como um componente elétrico. (c) Um circuito com um resistor, a junção, e uma fonte de corrente em paralelo.

a. Encontre uma equação diferencial (não linear) para a diferença de fase $\phi(t)$ da junção do circuito da Figura 1c. Dê sua resposta em funcao de R, L, I_C, I_0 e ϕ. 1,0pt

Agora, vamos analizar a dinâmica do circuito. Curiosamente, veremos que sua dinâmica depende bastante do sinal de $I_0 - I_C$. No restante dessa prova considere que estamos observando o sistema após um tempo suficientemente longo t, tal que não temos mais efeitos transientes no sistema.

b. Assumindo que $I_C \geq I_0$, encontre uma solucao para $\phi(t)$. 2.0pt

c. Assumindo que $I_C < I_0$, encontre $\phi(t)$, em função de I_C, I_0, L, R. Você pode querer usar a integral imprópria: 3.0pt

$$\int \frac{dx}{1 - \alpha \sin(x)} = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \arctan\left(\frac{\tan(x/2) - \alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right), \text{ onde } \alpha < 1. \tag{2}$$

d. Usando suas respostas da parte **b, c**, calcule o valor médio da voltagem $\langle V_{AB} \rangle$ (definida abaixo), em função de R, I_0, I_C. Faça um esboço de $\langle V_{AB} \rangle$ conforme I_0 varia. 4,0pt

$$\langle V_{AB} \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \cdot V_{AB}(t) \tag{3}$$

Gabarito:

a)

Sabemos que a voltagem entre AB é dada por:

$$V_{AB} = L\frac{d\phi(t)}{dt} = R \cdot I_R(t) \implies I_R = \frac{L}{R}\frac{d\phi(t)}{dt} \tag{4}$$

Onde I_R é a corrente passando pelo resistor. Alem disso, sabemos que a corrente fixa injetada I_0 deve obedecer:

$$I_0 = I_R(t) + I_C \sin\phi(t) \tag{5}$$

Combinando tudo, temos uma equação diferencial para $\phi(t)$:

$$\frac{L}{R}\frac{d\phi(t)}{dt} + I_C \sin\phi(t) - I_0 = 0 \tag{6}$$

Marking Scheme

- +0.5 Pontos por relacionar I_R e $\frac{d\phi}{dt}$
- +0.5 Pontos pela equação diferencial final correta

b)

A solução se $I_C \geq I_0$, é simplesmente $\phi(t) = \phi_0$, onde ϕ_0 é:

$$\phi_0 = \arcsin\left(\frac{I_0}{I_C}\right) \tag{7}$$

Note que essa solução não é mais válida para $I_C < I_0$.

Marking Scheme

- +1.0 Pontos por perceber que a unica solução possível é $\phi(t)$ constante
- +1.0 Pontos pela expressã final de $\phi(t)$

c) Nesse regime temos:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{R}{L}(I_0 - I_C\sin\phi) \implies \frac{d\phi}{1 - \frac{I_C}{I_0}\sin\phi} = \frac{R}{L}I_0 dt \tag{8}$$

$$\int \frac{d\phi}{1-\alpha\sin\phi} = \frac{R}{L}I_0 t \implies \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\arctan\left(\frac{\tan\phi/2 - \alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)$$

$$\phi(t) = 2\arctan\left(\alpha + \sqrt{1-\alpha^2}\tan\left(\frac{RI_0}{2L}t\sqrt{1-\alpha^2}\right)\right) + \Phi_0 \tag{9}$$

Onde definimos $\alpha \equiv \frac{I_C}{I_0}$, e Φ_0 é uma constante de integração arbitrária.

Marking Scheme

- +1.0 Pontos por relacionar $\int \frac{d\phi}{1-\alpha\sin\phi} = \frac{R}{L}I_0 t$
- +2.0 Pontos por $\phi(t)$ correto
- Penalize 0.5 Pontos por não incluir uma constante arbitrária de integração em $\phi(t)$

d)

Para a voltagem média $\langle V_{AB}\rangle$, perceba que para $I_C \geq I_0$ temos simplesmente, $\langle V_{AB}\rangle = 0$ ja que $\phi(t)$ é constante.

Para $I_C < I_0$, temos que computar o valor médio de $\frac{d\phi(t)}{dt}$ com $\phi(t)$ computado pelo item acima. Note que isso é mais simples do que parece ja que $\phi(t)$ é periodico (dentro de fatores de 2π), e para achar o periodo basta perceber que o periodo temporal T é tal que:

$$\frac{RI_0}{2L}\sqrt{1-\alpha^2}\cdot T = \pi \implies T = 2\pi\frac{L}{RI_0}\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \tag{10}$$

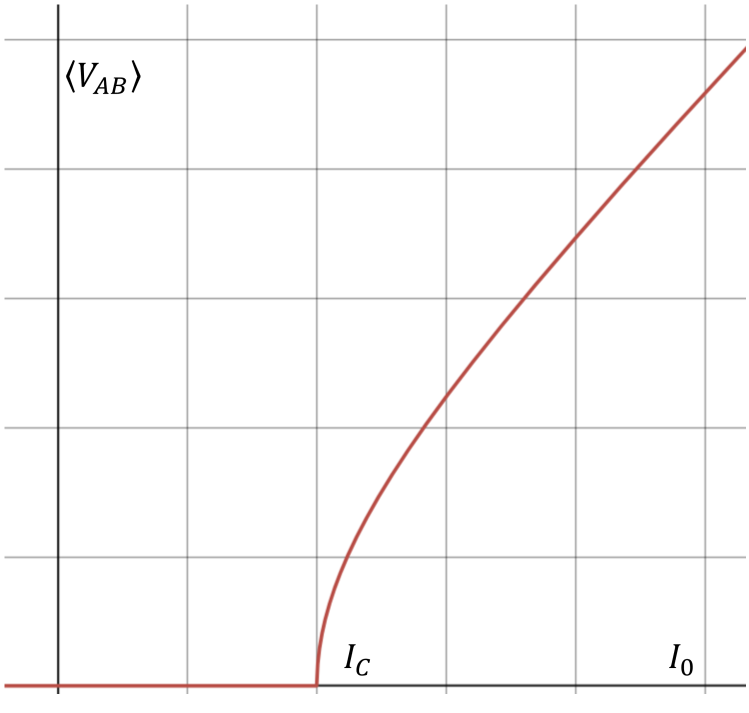
Ja que o periodo de $\tan x$ é π. Com isso, temos que:

$$\langle V_{AB}\rangle = \int_0^T dt\cdot L\frac{d\phi(t)}{dt} = L\cdot\frac{2\pi}{T} = RI_0\sqrt{1-\alpha^2} = RI_0\sqrt{1-\frac{I_C^2}{I_0^2}} = R\sqrt{I_0^2-I_C^2} \tag{11}$$

Dessa forma temos:

$$\langle V_{AB}\rangle = \begin{cases} 0 \text{ para } I_C \geq I_0, \\ R\sqrt{I_0^2-I_C^2} \text{ caso contrário} \end{cases} \tag{12}$$

O esboço de $\langle V_{AB}\rangle$ está abaixo:



Vale notar que até I_C a voltagem media é 0.

Marking Scheme

- +1.0 Pontos por escrever que para $I_C >= I_0$ a voltagem média é 0.
- +1.0 Pontos por notar que para $I_C < I_0$ o valor médio da voltagem é $\frac{2\pi}{T}$.
- +1.0 Pontos pela expressão de T correta
- +1.0 Pontos pelo gráfico correto indicando o ponto I_C no gráfico.
- Penalize 0.5 Pontos por erros algébricos.

Q5 - Partícula confinada num poço carregado (10 pontos)

Considere uma partícula de massa m e carga $q > 0$ confinada em um poço de potencial quadrado unidimensional na região $0 < x < L$. Nesse problema, discutiremos a relação entre o comprimento de onda de de Broglie λ da partícula com as autoenergias desse sistema em diferentes condições.

Inicialmente, a partícula não está sujeita a nenhuma força, a não ser a de confinamento.

a.	Quais os possíveis valores apresentados nos estados estacionários do produto $k_n \cdot L$, em que $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$ são os possíveis valores números de onda associados à partícula em estados estacionários?	2,0pt

b.	Determine as autoenergias E_n que podem ser apresentados pela partícula nos seus estados estacionários. Deixe sua resposta em termos da constante de Planck h, massa m e largura de poço L.	1,0pt

Posteriormente, as paredes do poço são carregadas e um campo elétrico uniforme $\mathcal{E}\hat{x}$ é estabelecido ao longo do poço.

c.	Calcule qual a energia potencial $U(x)$ adicional que deve ser considerada para representar o efeito do campo elétrico uniforme aplicado ao longo do poço. O ponto $x = 0$ como a sua referência de energia potencial.	1,0pt

No caso de partículas confinadas em uma região do espaço de energia potencial não constante, é possível definir um valor do comprimento de onda de de Broglie local $\lambda(x)$ para partículas com uma energia total E.

d.	Determine o número de onda local associado à partícula em função da sua posição x: $$k(x) = \frac{2\pi}{\lambda(x)}.$$	2,0pt

e.	Apresente a equação algébrica que deve ser satisfeita pelos novos autovalores E_n do sistema para estabelecer ondas estacionárias no poço com presença do campo elétrico $\mathcal{E} \neq 0$.	3,0pt

f.	Faça esboços de duas autofunções $\psi_n(x)$ distintas no poço com presença do campo elétrico $\mathcal{E} \neq 0$. Indique aspectos qualitativos relevantes das autofunções.	1,0pt

Gabarito:

(a) Os possíveis valores de $k_n \cdot L$ nos estados estacionários são

$$k_n \cdot L = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Isso reflete as condições de contorno do problema, em que as ondas estacionárias devem ter nós nas fronteiras $x = 0$ e $x = L$.

Marking Scheme:

- 1pt - Aplicação correta de Eq. de Schrödinger ou Comprimento de onda de de Broglie.
- 1pt - Resposta final correta.

(b) As autoenergias E_n nos estados estacionários são dadas por

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Marking Scheme:

- 1pt - Resposta final correta.
- Possível penalidade de 0,5 pt por pequenos erros algébricos.

(c) A energia potencial adicional devido ao campo elétrico uniforme é

$$U(x) = -q\mathcal{E}x.$$

Marking Scheme:

- 1pt - Resposta final correta.
- Possível penalidade de 0,5 pt por pequenos erros algébricos.

(d) O número de onda local associado à partícula em função de sua posição x é dado por

$$k(x) = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2m(E + q\mathcal{E}x)}.$$

Marking Scheme:

- 1pt - Cálculo do momento da partícula $p(x)$.
- 1pt - Relação $\lambda(x)$ e $k(x)$
- 1pt - Resposta final correta.

(e) Para o caso com $\mathcal{E} \neq 0$, os autovalores E_n devem satisfazer a condição de acúmulo de fase de $2n\pi$ em um caminho fechado para ondas estacionárias. Logo, para metade do caminho temos de ter um acúmulo de fase de $n\pi$. Assim:

$$\frac{2\pi}{h}\int_0^L \sqrt{2m(E_n + q\mathcal{E}x)}\, dx = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Calculando a integral, podemos chegar à seguinte expressão algébrica:

$$(E_n + q\mathcal{E}x)^{3/2} - E_n^{3/2} = \frac{3nh}{4}\sqrt{\frac{q\mathcal{E}}{2m}}.$$

Marking Scheme:

- 1pt - Condição de estabelecimento de onda estacionária.
- 1pt - Desenvolvimento correto da integral para pelo menos um valor de E_n.
- 1pt - Resposta final correta.

(f) No caso do poço com a presença do campo elétrico ($\mathcal{E} \neq 0$), o potencial inclinado gera autofunções oscilatórias assimétricas, com maior densidade de oscilação nas regiões onde o comprimento de onda local $\lambda(x)$ é menor, i.e., próximo de $x = L$). A amplitude de probabilidade $|\psi_n(x)|^2$ é maior na região próxima de $x = L$.

Marking Scheme:

- 0,5 pt - Variações mais rápidas na região de menor energia potencial.
- 0,5 pt - Discussão correta sobre amplitude de probabilidade ou diferente número de nós das autofunções.