

FORMULÁRIO

Ao longo das questões, você pode precisar utilizar os seguintes resultados / definições:

- Teorema da divergência:

$$\oint \vec{E} \cdot d^2\vec{s} = \iiint (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d^3V$$

- Divergente em coordenadas cartesianas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

- Divergente em coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

- Definição do operador laplaciano:

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \vec{\nabla} \phi$$

- Operador laplaciano em coordenadas cartesianas:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Q1 - Pêndulo de Foucault (20 pontos)

O pêndulo de Foucault é um experimento projetado para demonstrar a rotação da Terra, cujo nome é uma homenagem ao seu criador, o físico francês Léon Foucault. O experimento original consiste em suspender um peso de $M = 28\text{kg}$ na extremidade de um fio suspenso de $L = 67\text{m}$, livre para oscilar em qualquer direção no plano horizontal. O peso é feito de aço e tem um raio de aproximadamente $9,5\text{ cm}$.

À medida que o pêndulo oscila, a rotação da Terra causa uma lenta precessão do plano de oscilação, visível ao longo de um intervalo de tempo suficientemente longo. O pêndulo original do cientista francês, instalado em 1851 e mostrado pela Figura 1, continua em exibição no Panthéon de Paris.



Figura 1: Foto do Pêndulo de Foucault em Paris.

Ao longo de todo o problema, consideraremos o estudo do movimento do pêndulo para pequenas oscilações. Assuma que a aceleração local da gravidade em Paris vale $g = 9,81\text{ m/s}^2$ e que sua latitude seja de $\lambda_P = 48^\circ$. Responda aos itens a seguir, apresentando, sempre que possível, as expressões literais seguidas dos valores numéricos solicitados.

Parte A - Movimento pendular e efeitos de dissipação (4,0 pontos)

Nessa parte do problema, você pode desprezar o movimento de precessão do pêndulo.

A.1 Calcule o valor numérico do período de uma oscilação do pêndulo de Foucault original em segundos. 1,0pt

Gabarito:

Para pequenas oscilações, o período de um pêndulo simples é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

onde:

- $L = 67\text{ m}$ é o comprimento do fio;
- $g = 9,81\text{ m/s}^2$ é a aceleração da gravidade em Paris.

Substituindo os valores:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{67}{9,81}} = 16,4\text{ s.}$$

Marking Scheme:

- 1,0 pt - valor numérico correto e justificado

O pêndulo de Foucault possui uma massa e um comprimento tão grandes por razões ligadas à necessidade de demonstrar a rotação da Terra.

- A.2** Supondo que a aproximação de ângulos pequenos seja válida até $\theta_{max} = 10^\circ$, calcule a amplitude linear máxima, X_{max} , que o pêndulo pode oscilar em torno da posição de equilíbrio. 1,0pt

Gabarito:

A relação entre a amplitude angular máxima θ_{max} e a amplitude linear máxima X_{max} é dada por:

$$X_{max} = L \cdot \sin(\theta_{max})$$

Para θ_{max} pequeno (em radianos), pode-se usar a aproximação:

$$\sin(\theta_{max}) \approx \theta_{max}$$

Assim, temos:

$$X_{max} \approx L \cdot \theta_{max}$$

Onde:

- $L = 67 \text{ m}$ é o comprimento do fio;
- $\theta_{max} = 10^\circ = \frac{\pi}{18} \text{ rad} \approx 0,1745 \text{ rad}$.

Substituindo os valores:

$$X_{max} \approx 67 \cdot 0,1745 \approx 11,69 \text{ m}.$$

Portanto, a amplitude linear máxima é aproximadamente 11,69 m.

Marking Scheme:

- 1,0 pt - valor numérico correto e justificado

A viscosidade η pode ser interpretada como a grandeza física associada à resistência de um fluido ao seu escoamento ou ao movimento de corpos no seu interior. Em regimes de baixa velocidade, ela é a principal fonte de dissipação de energia mecânica.

A lei de Stokes descreve a força de arrasto F_a exercida por um fluido viscoso sobre uma esfera de raio r com baixa velocidade v com respeito ao meio material. A intensidade dessa força pode ser calculada como

$$F_a = 6\pi\eta r v.$$

A viscosidade dinâmica do ar é aproximadamente dada por $\eta_{ar} = 1,81 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

- A.3** Estime o tempo necessário para que as oscilações do pêndulo de Foucault sofram um decaimento de uma amplitude de oscilação em 50% devido aos efeitos de atrito viscoso. 2,0pt

Gabarito:

A massa M suspensa está sujeita a uma força restauradora e uma força dissipativa. O movimento pode ser modelado como um oscilador amortecido com equação de movimento dada por

$$\frac{d^2}{dt^2}x + 2\alpha \frac{d}{dt}x + \omega_0^2 x = 0.$$

A solução dessa equação diferencial é um termo oscilatório multiplicado por uma amplitude de oscilação que decai exponencialmente:

$$A(t) = A_0 e^{-\alpha t},$$

em que

- $A(t)$ é a amplitude no instante t ,
- A_0 é a amplitude inicial,
- $\alpha = \frac{3\pi\eta r}{M}$ é a constante associada ao decaimento exponencial.

Sabendo que a amplitude decai para 50% do valor inicial:

$$0.5 = e^{-\alpha T_{50}}.$$

Tomando o logaritmo natural:

$$\alpha T_{50} = \ln(2) \quad \Rightarrow \quad T_{50} = \frac{\ln(2)}{\alpha} = \ln(2) \cdot \frac{m}{3\pi\eta r}.$$

Substituindo os valores numéricos :

$$T_{50} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ s} = 330h.$$

Marking Scheme:

- 1,0 pt - Determinação da equação de decaimento exponencial da amplitude
- 0,5 pt - Expressão do parâmetro de decaimento τ
- 0,5 pt - Cálculo numérico do tempo solicitado

Parte B - Movimento de precessão (12,0 pontos)

Caso a oscilação do pêndulo seja restrita a ângulos pequenos, podemos desprezar deslocamentos do corpo suspenso ao longo da direção vertical z . Seja a posição $(x, y) = (0, 0)$ a posição de equilíbrio do pêndulo projetada no plano horizontal. O eixo x aponta para o norte e y , para o oeste. Denote a velocidade vetorial projetada nesse plano como sendo $\vec{v} = (v_x, v_y)$. O peso do pêndulo é abandonado da posição inicial $(X_A, 0)$, tal que $X_A < X_{max}$, a partir do repouso.

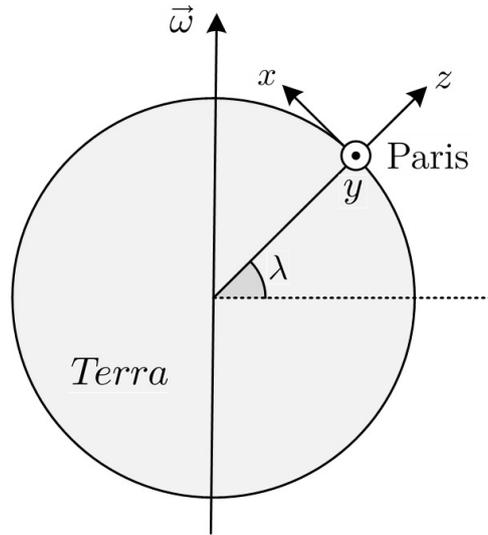
O pêndulo de Foucault, de acordo com um observador terrestre, apresenta uma precessão do plano de oscilação observável após um tempo suficientemente longo. Trata-se de um fenômeno diretamente ligado à rotação da Terra.

O movimento de precessão pode ser previsto incluindo a força de Coriolis nas equações de movimento do corpo. A força de Coriolis \vec{F}_C atua perpendicularmente à direção do movimento do pêndulo e ao eixo de rotação da Terra, sendo expressa pela seguinte expressão:

$$\vec{F}_C = -2M \cdot \vec{\omega} \times \vec{v},$$

em que $\vec{\omega}$ é o vetor velocidade angular de rotação do referencial não-inercial girante considerado. O diagrama

esquemático dos eixos do sistema está indicado na figura a seguir.



- B.1** Determine a força resultante percebida por um observador no referencial da Terra na situação em que o pêndulo encontra-se na posição (x, y) e tem velocidade (v_x, v_y) . Considere as componentes associadas às forças gravitacional e de Coriolis. 3,0pt

Gabarito:

A força resultante no referencial da Terra é composta por:

- A força gravitacional, que atua como o componente restaurador para pequenas oscilações, dada por:

$$\vec{F}_g = -\frac{Mg}{L}(x\hat{x} + y\hat{y}),$$

- A força de Coriolis, perpendicular ao plano de oscilação, é dada por:

$$\vec{F}_C = -2M\vec{\omega} \times \vec{v},$$

onde:

- $\vec{\omega} = \omega(\cos \lambda \hat{x} + \sin \lambda \hat{z})$ é o vetor velocidade angular da Terra,
- $\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y}$ é a velocidade do pêndulo no plano horizontal,
- λ é a latitude do local.

Assim, a projeção da força de Coriolis no plano xy é:

$$\vec{F}_C = 2M\omega \sin \lambda (v_y \hat{x} - v_x \hat{y}).$$

A força resultante total no plano horizontal é:

$$\vec{F}_{\text{total}} = \vec{F}_g + \vec{F}_C.$$

Portanto, as componentes da força resultante são:

$$F_x = -Mg \frac{x}{L} + 2M\omega \sin \lambda v_y,$$

$$F_y = -Mg \frac{y}{L} - 2M\omega \sin \lambda v_x.$$

Marking Scheme:

- 1,00 pt - Componentes da força gravitacional
- 1,00 pt - Expressão de $\vec{\omega}$
- 1,00 pt - Componentes da força de Coriolis

Nas suas primeiras oscilações, o movimento do pêndulo está aproximadamente contido no plano xz . À medida que o tempo passa, o plano de movimento é alterado com uma velocidade angular percebida por um observador local $\Omega \ll \omega$.

- B.2** Encontre as equações diferenciais que regem a variação de das coordenadas do pêndulo $x(t)$ e $y(t)$. Para quem visualiza o movimento do pêndulo do teto para o chão em Paris, o movimento de precessão do plano de oscilação acontece no sentido horário ou anti-horário? 2,0pt

Gabarito:

Aplicando a 2ª lei de Newton e dividindo as equações pela massa M , obtemos as equações diferenciais do movimento:

$$\ddot{x} + \frac{g}{L}x = 2\omega \sin \lambda \dot{y},$$

$$\ddot{y} + \frac{g}{L}y = -2\omega \sin \lambda \dot{x}.$$

A aplicação das equações obtidas em casos particulares é o suficiente para perceber que o movimento de precessão do plano é no **sentido horário**, isto é, oposto ao sentido do movimento de rotação da Terra, segundo um observador em Paris.

Marking Scheme:

- 1,0 pt - Aplicação da 2ª lei de Newton e equações de movimento
- 1,0 pt - Identificação correta do sentido de precessão

- B.3** Determine a velocidade angular de precessão Ω do pêndulo visto por um observador terrestre. 6,0pt

Dica: Caso ache conveniente, você pode considerar uma quantidade complexa auxiliar $\eta = x + iy$ para descrever a posição do móvel.

Gabarito:

Partindo das equações:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{L}x + 2i\dot{y}\omega \cos \theta,$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{L}y - 2i\dot{x}\omega \cos \theta,$$

escrevemos a frequência angular natural do pêndulo como

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}},$$

enquanto a componente z da velocidade angular da Terra é:

$$\omega_z = \omega \sin \lambda.$$

Assim, as equações do movimento podem ser reescritas como:

$$\ddot{x} - 2\omega_z \dot{y} + \omega_0^2 x = 0,$$

$$\ddot{y} + 2\omega_z \dot{x} + \omega_0^2 y = 0.$$

Essas são duas equações acopladas que podem ser simplificadas definindo uma nova coordenada complexa:

$$\eta = x + iy.$$

Multiplicando a segunda equação acoplada por i e somando à primeira equação, obtemos:

$$(\ddot{x} + i\ddot{y}) + 2i\omega_z(\dot{x} + i\dot{y}) + \omega_0^2(x + iy) = 0,$$

ou seja, uma equação diferencial para η :

$$\ddot{\eta} + 2i\omega_z \dot{\eta} + \omega_0^2 \eta = 0.$$

Note que a coordenada complexa η contém todas as informações sobre a posição no plano xy . O gráfico de η no plano complexo de Argand-Gauss corresponde a posição (x, y) do móvel projetado no plano de movimento. A equação diferencial homogênea de segunda ordem tem duas soluções independentes, que podem ser derivadas supondo uma solução da forma:

$$\eta(t) = Ae^{-i\alpha t}.$$

Substituindo $\eta(t)$ na equação diferencial, obtemos:

$$\alpha^2 - 2\omega_z \alpha - \omega_0^2 = 0.$$

Resolvendo para α :

$$\alpha = \omega_z \pm \sqrt{\omega_z^2 + \omega_0^2}.$$

Para o caso em que $\omega_0 \gg \Omega$, temos:

$$\alpha \approx \omega_z \pm \omega_0.$$

Portanto, a solução geral para $\eta(t)$ é:

$$\eta(t) = e^{-i\omega_z t} (A_+ e^{i\omega_0 t} + A_- e^{-i\omega_0 t}),$$

onde A_+ e A_- são constantes determinadas pelas condições iniciais.

Isso pode ser reescrito como:

$$\eta(t) = Ae^{-i\omega_z t} \cos(\omega_0 t + \delta),$$

onde A é a amplitude e δ é a fase inicial.

Interpretação Física

A expressão acima mostra que o plano de oscilação do pêndulo gira com uma velocidade angular de precessão ω_z . Como η representa a posição do pêndulo no plano xy , a fase $e^{-i\omega_z t}$ descreve uma rotação desse plano ao longo do tempo. A velocidade angular de precessão é:

$$\Omega = \omega_z = \omega \sin \lambda.$$

Marking Scheme:

- 2,0 pt - Equação diferencial correta para $\eta(t)$.
- 2,0 pt - Determinação da solução $\eta(t)$.

- 1,0 pt - Interpretação física da solução $\eta(t)$.
- 1,0 pt - Resposta final de Ω .

Solução alternativa:

- 2,0 pt - Formulação matricial do sistema de equações $[x(t), y(t)]^T$.
- 2,0 pt - Determinação da solução $[x(t), y(t)]^T$.
- 1,0 pt - Interpretação física da solução do sistema.
- 1,0 pt - Resposta final de Ω .

B.4 Quantas oscilações o pêndulo precisa fazer até que o seu plano de movimento seja alterado por um ângulo de 90° em Paris? E em João Pessoa ($\lambda_{JP} = -7^\circ$)? 1,0pt

Gabarito:

A velocidade angular de precessão do plano de oscilação do pêndulo é dada por:

$$\Omega = \omega \sin \lambda,$$

A precessão completa (360°) do plano de movimento ocorre em:

$$T_p = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

Esse período em Paris é de $T_p(\text{Paris}) = 1,16 \cdot 10^5$ s e em João Pessoa, de $T_p(\text{João Pessoa}) = 7,09 \cdot 10^5$ s.

A pressão de 90° corresponde a um quarto de período. E o número de oscilações pode ser determinado calculando a razão dos tempos calculados com $T_0 = 16,4$ s. Logo:

$$N_{\text{Paris}} \approx 1772, \quad N_{\text{João Pessoa}} \approx 10807.$$

Marking Scheme:

- 0,50 pt - Expressão correta do período de precessão
- 0,50 pt - Valores numéricos corretos

Parte C - Pêndulo de Foucault eletromagnético (4,0 pontos)

Vamos explorar agora uma estratégia para reproduzir o fenômeno do pêndulo de Foucault em um referencial inercial localizado em um ambiente sem força gravitacional relevante. Para isso, considere um corpo de massa m e carga elétrica $q > 0$, fixado em um pêndulo cujo comprimento é dado por l . Considere a aproximação de ângulos pequenos e o sistema de coordenadas descrito na parte B.

Para gerar efeitos similares ao pêndulo de Foucault, o peso é liberado a partir do repouso em uma região do espaço com um campo elétrico \vec{E} e campo magnético \vec{B} uniformes. Deseja-se obter nesse experimento o mesmo período de oscilação T_0 e velocidade angular de precessão Ω que o pêndulo de Foucault de Paris.

C.1 Determine os campos \vec{E} e \vec{B} , em função de m, q, l, T_0 e Ω . 2,0pt

Gabarito:

O objetivo é ajustar as características do “pêndulo eletromagnético” para que ele imite o comportamento do pêndulo de Foucault. O movimento do pêndulo eletromagnético é governado pelas forças elétrica e magnética que atuam na carga q sob os campos \vec{E} e \vec{B} .

i) Força elétrica atuando como força restauradora

A força restauradora deve ser proporcional ao deslocamento da carga elétrica em relação à posição de equilíbrio. Para pequenas oscilações, isso implica:

$$\vec{F}_{\text{rest}} = q\vec{E}.$$

O movimento resultante é análogo ao de um pêndulo simples com força gravitacional:

$$m\ddot{x} = -qE\frac{x}{l},$$

onde l é o comprimento do “pêndulo eletromagnético”. Comparando essa relação com as equações do pêndulo de Foucault, obtemos a primeira relação que deve ser satisfeita:

$$\frac{qE}{lm} = \frac{g}{L} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2. \quad (1)$$

ii) Força magnética para reproduzir a precessão

A precessão do plano de oscilação deve ser causada pela força de Lorentz, que depende do campo magnético \vec{B} :

$$\vec{F}_{\text{mag}} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Essa força deve exercer o mesmo efeito da força de Coriolis, que pode ser reescrita como

$$\vec{F}_C = M\vec{v} \times (2\vec{\omega}).$$

Logo, precisamos satisfazer a condição:

$$\frac{q}{m}B_z = 2\omega_z = 2\Omega.$$

Marking Scheme:

- 1,0 pt - Condição que determina o campo elétrico
- 1,0 pt - Condição que determina o campo magnético

A fórmula de Larmor fornece a potência irradiada por uma carga pontual acelerada de acordo com a teoria eletromagnética clássica. Para uma partícula de carga q , acelerada com aceleração \vec{a} , a potência irradiada é dada por

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c},$$

em que P é a potência irradiada, μ_0 é permeabilidade do vácuo ($4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$), a é módulo da aceleração da partícula e c é velocidade da luz no vácuo ($3 \times 10^8 \text{ m/s}$).

- C.2** Forneça uma expressão capaz de estimar a ordem de grandeza do tempo necessário para que as oscilações do pêndulo de Foucault eletromagnético sofram um decaimento de uma amplitude de oscilação em 50% devido aos efeitos de irradiação eletromagnética. Sua resposta deve ser escrita em termos de c , m , q e fatores numéricos. 2,0pt

Gabarito:

A energia mecânica total do pêndulo é proporcional ao quadrado da amplitude A : $U \propto A^2$.

Se a amplitude decai para 50% do valor inicial, a energia decai para:

$$U(t) = \frac{1}{4}U_0.$$

A energia do sistema diminui devido à potência irradiada:

$$\frac{dU}{dt} = -P,$$

onde P é dado pela fórmula de Larmor:

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}.$$

Para oscilações harmônicas simples, a aceleração quadrática média em uma oscilação é dada por

$$\langle a^2 \rangle = \frac{1}{2}\omega_0^4 A^2,$$

onde $\omega_0 = \sqrt{\frac{qE}{ml}}$ é a frequência angular natural do pêndulo. Assim:

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 q^2 (\omega_0^2 A)^2}{12\pi c} = \frac{\mu_0 q^2 \omega_0^4 A^2}{12\pi c}.$$

A energia total de oscilação é dada por:

$$U = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2.$$

A taxa de variação da energia é:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{\mu_0 q^2 \omega_0^2}{6\pi c m} U.$$

A solução da equação diferencial é:

$$U(t) = U_0 e^{-\alpha t},$$

onde α é dado por:

$$\alpha = \frac{\mu_0 q^2 \omega_0^2}{6\pi c m}.$$

A energia cai para 50% quando:

$$\alpha T = \ln(4).$$

Marking Scheme:

- 1,0 pt - Argumentos corretos de análise dimensional ou de taxas de decaimento.
- 1,0 pt - Determinação de tempo do tipo:

$$t \propto \frac{1}{\alpha}.$$

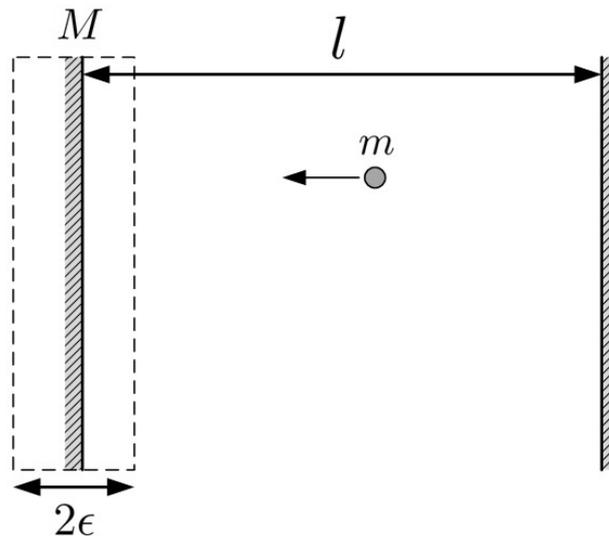
Q2 - Aceleração de Raios Cósmicos através do Mecanismo de Fermi (20 pontos)

A origem dos raios cósmicos ultra-energéticos e os mecanismos que lhes fornecem altas energias ainda é uma das questões não esclarecidas pela Astrofísica, constituindo tema de muitas pesquisas na área. Os mecanismos de aceleração são processos físicos que explicam como os raios cósmicos adquirem energia ao se propagar pelo meio interestelar, após abandonarem a região em que foram gerados. Usualmente, existem dois mecanismos de ganho de energia: um devido a campos eletromagnéticos e outro associado a processos estocásticos.

Neste problema, estaremos falando do mecanismo de aceleração de raios cósmicos baseado no modelo estocástico de Fermi-Ulam.

Parte A - Modelo clássico de Fermi-Ulam (3,0 pontos)

Nesta primeira parte, o problema trata sobre o modelo clássico de Fermi-Ulam. Considere um acelerador clássico como o da figura abaixo. O modelo contém duas paredes rígidas, uma móvel, de massa M (à esquerda) e uma fixa. A parede móvel realiza um movimento oscilatório, de amplitude ϵ , descrito pela equação $x_p(t) = \epsilon \cos(\omega t)$, em que $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ é a frequência angular do seu movimento. Uma partícula clássica se move entre as duas paredes cuja separação “média” é l . A região $-\epsilon < x < +\epsilon$ é chamada “região de colisão”.



A dinâmica deste problema consiste na partícula colidir com a parede móvel e que volte a colidir com ela, várias vezes, sem sair da zona de colisão, a isto chamamos de **colisões múltiplas**. A partícula, então, deverá ser acelerada uma e outra vez entre colisões sucessivas.

Consideremos que a partícula colidiu com a parede móvel no instante $t = t_n$ e que o intervalo de tempo entre as colisões seja δt , sempre o mesmo. A velocidade da partícula no instante após à “n-ésima” colisão é u_n . Entre colisões sucessivas, a velocidade escalar do móvel pode ser considerada constante.

A.1	Encontre a expressão da posição da partícula no instante t_{n+1} , $x(t_{n+1})$, em função de u_n , t_n e δt .	1,0pt
------------	---	-------

A.2	Mostre que a velocidade da partícula, no instante t_{n+1} , pode ser escrita da forma	2,0pt
------------	---	-------

$$u_{n+1} = -ru_n - (1+r)\epsilon\omega \sin(\omega t_{n+1})$$

com $M \gg m$ e r representa o coeficiente de restituição da colisão.

Usando a troca de variáveis $U_n = \frac{u_n}{\omega l}$ e $\eta = \frac{\epsilon}{l}$, a expressão anterior pode ser reescrita, em função de variáveis adimensionais, como

$$U_{n+1} = -rU_n + (1+r)\eta \sin(\Phi_{n+1})$$

Como $\Phi_{n+1} = \Phi_n + \delta\Phi$ e $\delta\Phi = \omega\delta t = \omega \frac{\delta x}{u_n} \sim \omega U_n^{-1}$, então podemos escrever

$$\Phi_{n+1} \sim \Phi_n + \omega U_n^{-1}$$

As equações para U_{n+1} e Φ_{n+1} constituem o “mapa de colisões” deste processo caótico.

Gabarito:

A.1 - 1,0 pontos

Em $t = t_n \Rightarrow x_p(t_n) = x(t_n)$, em que x_p e x são, respectivamente, as posições da parede e da partícula.

Na próxima colisão:

$$t_{n+1} = t_n + \delta t \Rightarrow x_p(t_{n+1}) = \epsilon \cos [\omega(t_n + \delta t)]$$

em que δt é o intervalo de tempo entre uma colisão e outra, e

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + u_n \delta t$$

considerando u_n constante.

Marking scheme

A.1.

0,5 ponto pela expressão de t_{n+1}

0,5 ponto pela expressão de $x(t_{n+1})$

A.2 - 2,0 pontos

Igualando estas expressões:

$$x(t_n) + u_n \delta t = \epsilon \cos [\omega(t_n + \delta t)]$$

$$x(t_n) = x_p(t_n) = \epsilon \cos \omega t_n$$

Então, substituindo:

$$\epsilon \cos \omega t_n + u_n \delta t = \epsilon \cos [\omega(t_n + \delta t)]$$

Usando a identidade mostrada no enunciado da questão, chegamos facilmente a

$$u_n \delta t = \epsilon \cos \omega t_n (\cos \omega \delta t - 1) - \epsilon \sin \omega t_n \sin \omega \delta t$$

Sabemos que $v_{depois} = -r v_{antes}$, para as velocidades relativas de afastamento e aproximação, em que r é o coeficiente de restituição. Daí

$$u_{n+1} - V_{n+1} = -r(u_n - V_n)$$

Aqui a velocidade da parede está representada pela letra V . Como $M \gg m$, $V_{n+1} \rightarrow V_n = \frac{dx_p(t)}{dt} = -\epsilon \omega \sin(\omega t_{n+1})$, daí, substituindo e ajeitando:

$$u_{n+1} = -r u_n - (1+r)\epsilon \omega \sin(\omega t_{n+1})$$

Marking scheme

A.2.

1,0 ponto por substituições que levem à expressão correta de $u_n \delta t$

0,5 ponto por chegar a

$$u_{n+1} - V_{n+1} = -r(u_n - V_n)$$

0,5 ponto pela expressão final.

Parte B - Espelhos magnéticos (5,0 pontos)

O modelo de aceleração de raios cósmicos, conhecido como Mecanismo de Fermi, propõe que as partículas ganhem energia na sua colisão estocástica com nuvens magnéticas no meio interestelar. Nestas reflexões perfeitas, as nuvens atuam como espelhos magnéticos, capazes de refletir partículas carregadas.

Estaremos tratando, inicialmente, apenas do funcionamento dos espelhos magnéticos. Um espelho magnético é um efeito que ocorre quando uma partícula carregada encontra-se com uma região permeada por um campo magnético não homogêneo, sendo refletida por esse campo em algum ponto.

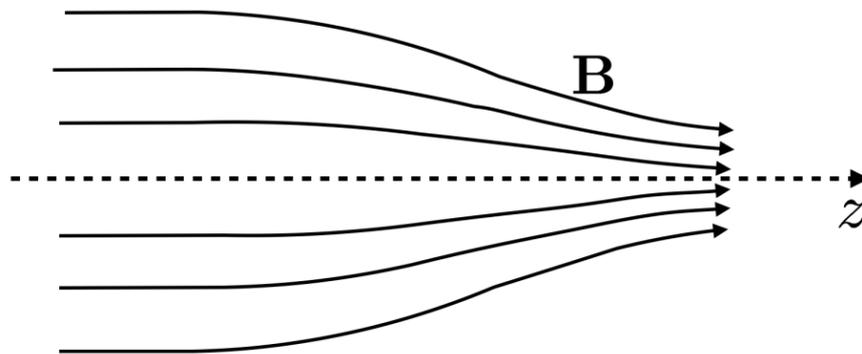
Nesta parte, tentaremos entender o mecanismo de aceleração por espelhos magnéticos, sem considerar efeitos relativísticos. Considere que uma partícula não relativística, de carga q com velocidade $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$ (\vec{v}_{\parallel} : paralela ao campo, \vec{v}_{\perp} : perpendicular ao campo) entre numa região com campo magnético aplicado.

B.1 Mostre que, no caso em que $v_{\perp} \gg v_{\parallel}$, o momento magnético gerado pela corrente produzida pela carga em movimento pode ser escrito, aproximadamente, como 1,0pt

$$\mu_{\perp} = \frac{E_{c\perp}}{B}$$

em que B é o módulo do vetor indução do campo magnético e $E_{c\perp}$ representa o termo da energia cinética da partícula, devido à velocidade perpendicular a esse campo.

Considere agora que a partícula se move no interior de um campo magnético não uniforme, cuja componente na direção z esteja aumentando. Para isso, será considerado o campo magnético da forma $\vec{B} = B_r \hat{r} + B_z \hat{z}$ em coordenadas cilíndricas, devido à simetria geométrica do problema, ver figura abaixo. Consideremos aqui que a componente B_z do campo magnético é muito maior que a sua componente radial B_r e que B_z varia lentamente com r .



Em coordenadas cilíndricas, a velocidade da partícula pode ser escrita como $\vec{v} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel}$, sendo $\vec{v}_{\perp} = v_r \hat{r} + v_{\theta} \hat{\theta}$, e $\vec{v}_{\parallel} = v_z \hat{z}$.

B.2 Considerando que $v_r \ll v_{\theta}$, encontre uma expressão para a componente z da força de interação magnética da partícula com o campo, em termos de μ_{\perp} e da componente z do gradiente do campo, $\frac{\partial B}{\partial z}$. 2,0pt

A expressão solicitada no item B.2 é conhecida como força do espelho magnético (em inglês, *mirror force*). À medida que a partícula adentra na região de campo magnético mais intenso, v_{\perp} aumenta, dessa forma v_{\parallel} diminui, para a energia cinética ser conservada, até se anular. Então, a força magnética do espelho, na direção das linhas de campo, faz a partícula parar e retroceder, funcionando como um mecanismo de reflexão.

B.3 Mostre que o momento magnético μ_{\perp} constitui uma quantidade invariante, isto é, 2,0pt

$$\frac{d\mu_{\perp}}{dt} = 0.$$

Dica: A força magnética não realiza trabalho, logo

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = \int q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0.$$

Gabarito:

B.1 - 1,0 ponto

Devido à componente v_{\perp} da partícula ser muito maior que a componente v_{\parallel} , dentro da região do campo, a sua trajetória será aproximadamente circular, de raio

$$r = \frac{mv_{\perp}}{qB}$$

Ao descrever a trajetória circular, forma-se uma linha de corrente

$$I = \frac{q}{\Delta t} = \frac{qv_{\perp}}{2\pi r}$$

Então

$$\mu_{\perp} = IS = I\pi r^2$$

Substituindo a corrente

$$\mu_{\perp} = \frac{qv_{\perp}r}{2}$$

Substituindo agora a expressão para r , temos, finalmente

$$\mu_{\perp} = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \frac{E_{c\perp}}{B}$$

Marking scheme

B.1.

0,25 ponto pela expressão de r

0,5 ponto por chegar à expressão para μ_{\perp}

$$\mu_{\perp} = \frac{qv_{\perp}r}{2}$$

0,25 ponto pela substituição e o resultado final.

B.2 - 2,0 pontos

A partir das considerações $v_{\theta} \gg v_r$ e $B_z \gg B_r$, então

$$v_{\perp} \approx v_{\theta}$$

o que impõe trajetórias aproximadamente circulares.

Da lei de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Em coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} \approx \frac{\partial B}{\partial z}$$

Assim

$$rB_r \approx - \int_0^r r' \frac{\partial B}{\partial z} dr' \rightarrow B_r \approx -\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial z}$$

A equação do movimento no eixo z

$$F_z = m \frac{dv_{\parallel}}{dt}$$

A força magnética

$$\vec{F} = (q\vec{v} \times \vec{B}) = q(\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}) = q(v_r \hat{r} + v_{\theta} \hat{\theta}) \times (B_r \hat{r} + B_z \hat{z})$$

Daí:efetuando o produto vetorial

$$F_z = m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -qv_{\theta} B_r \approx -qv_{\perp} \left(-\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial z} \right)$$

Usando a expressão para o raio da órbita

$$F_z = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial z} = \mu_{\perp} \frac{\partial B}{\partial z}$$

inda...quem fizer assim...

$$U = -\vec{\mu}_{\perp} \cdot \vec{B}$$

Assim

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \mu_{\perp} \frac{\partial B}{\partial z}$$

terão apenas pontuação parcial neste item, devido a que μ_{\perp} não necessariamente é constante.

Marking scheme

B.2.

1,0 ponto por encontrar a expressão aproximada de B_r .

0,5 ponto por chegar à expressão para F_z em função do gradiente do campo magnético. (0,25 pontos) para quem calcular a força usando o gradiente da energia.

0,5 ponto pela substituição do raio e o resultado final de F_z .

B.3 - 2,0 pontos

Usando, da resolução do item anterior

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial z}$$

e multiplicando, em ambos membros por $v_{\parallel} = \frac{dz}{dt}$, temos

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} v_{\parallel} = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{dz}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{mv_{\parallel}^2}{2} \right) = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} \frac{dB}{dt} = -\mu_{\perp} \frac{dB}{dt}$$

o sinal negativo vem do fato de que a energia cinética diminui.

A força magnética não realiza trabalho, assim

$$\Delta E_c = W = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (E_{C,\parallel} + E_{C,\perp}) = 0.$$

Isto é

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_{\parallel}^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} (\mu_{\perp} B) = 0$$

Substituindo, em função de μ_{\perp}

$$-\mu_{\perp} \frac{dB}{dt} + \frac{d}{dt}(\mu_{\perp} B) = -\mu_{\perp} \frac{dB}{dt} + \mu_{\perp} \frac{dB}{dt} + B \frac{d\mu_{\perp}}{dt} = 0$$

Daí

$$\boxed{\frac{d\mu_{\perp}}{dt} = 0}$$

Marking scheme

B.3.

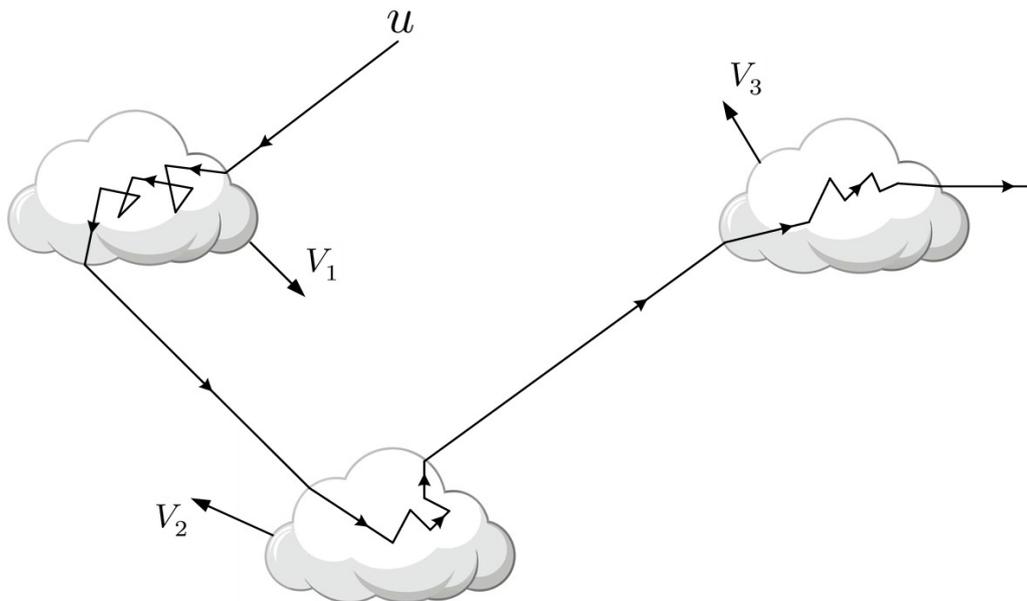
0,5 ponto por chegar à equação diferencial, com o sinal negativo.

0,5 ponto por declarar a invariância de $(E_{C,\parallel} + E_{C,\perp})$

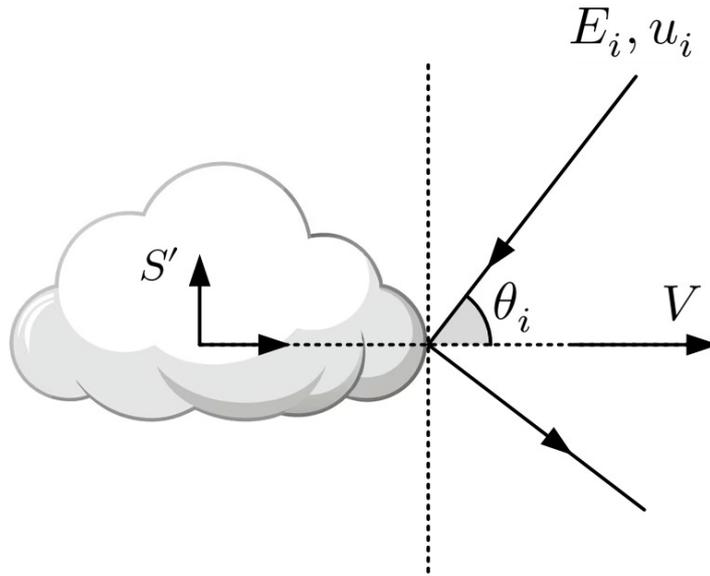
1,0 ponto pelas substituições e o resultado final.

Parte C - Modelo de Fermi relativístico (9,0 pontos)

Na colisão elástica com as nuvens magnéticas, astropartículas (partículas relativísticas), como os raios cósmicos, podem ser aceleradas.



Considere que uma nuvem se move com velocidade V em relação ao referencial do observador. Nesse referencial, a partícula também tem, inicialmente, energia e momento dados (ver figura abaixo). Aqui foi desconsiderado o movimento estocástico da partícula devido às colisões dentro da nuvem.



Este processo ocorre de maneira semelhante à reflexão de uma partícula num espelho. Considere que uma partícula, desta vez, relativística, de energia E_i , e velocidade \vec{u}_i é refletida (perfeitamente) por um espelho solidário a um referencial S' . Considere $\beta = \frac{V}{c}$, sendo V a velocidade do referencial S' em relação ao referencial em repouso S , e θ_i , o ângulo de incidência da partícula de acordo com o referencial S .

C.1 Determine as componentes do momento linear antes e depois da reflexão ($p'_{i,x}$, $p'_{r,x}$) e a energia E'_i da partícula, segundo o referencial S' , em função de γ , β , θ_i , E_i e p_i . 1,5pt

C.2 Mostre que a energia final após a colisão elástica com a nuvem, medida do referencial em repouso S , é 2,5pt

$$E_f = E_i \left[\frac{1 + 2\beta(u_i/c) \cos \theta_i + \beta^2}{1 - \beta^2} \right].$$

No processo de colisões múltiplas (várias colisões antes de sair da zona de colisão) as taxas de incidência de partículas, no referenciais S e S' , podem ser definidas como $T = \frac{N}{\Delta t}$ e $T' = \frac{N'}{\Delta t'}$, respectivamente, aqui, $N = N'$ significa que para ambos referenciais, os observadores veem o mesmo número de partículas colidindo.

C.3 Suponha que, no referencial da nuvem (S'), duas partículas chegam na origem nos instantes t_1 e t_2 , respectivamente. Use as transformações de Lorentz do espaço-tempo entre os referenciais S e S' , para mostrar que 3,0pt

$$\frac{T'}{T} = \gamma \left(1 + \frac{V}{u} \cos \theta_i \right),$$

em que γ é o fator de Lorentz, V , a velocidade relativa entre os referenciais e u , a velocidade das partículas.

C.4 Encontre uma expressão aproximada para o ganho médio de energia em uma colisão $\langle \delta E \rangle = \langle \frac{\Delta E}{E_i} \rangle$, para $V \ll c$, no caso em que $u_i \approx c$. Despreze ordens superiores a β^2 na expressão aproximada, caso apareçam. 2,0pt

Dica: Considere que

$$\langle \cos \theta_i \rangle = \frac{\int \cos \theta_i dP}{\int dP},$$

em que $dP \propto (1 + \beta \cos \theta_i) d\Omega$, e $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$, o elemento de ângulo sólido subtendido pelo elemento de área

da nuvem sobre a qual a partícula colide. Perceba que $dP \propto \frac{T'}{T}$ pode ser considerado uma espécie de “densidade de probabilidade”, em função da razão das taxas de colisões “vistas” pelo observador em S' em relação com as “vistas” em S .

Gabarito:

C.1 - 1,5 pontos

Em S , da conservação do momento linear, a partir da figura ilustrativa acima:

$$\vec{p}_i = -p_i \cos \theta_i \hat{x} + p_i \sin \theta_i \hat{y}$$

$$\vec{p}_r = p_r \cos \theta_r \hat{x} + p_r \sin \theta_r \hat{y}$$

Os subíndices i e r representam a incidência e a reflexão, respectivamente. Em S' :

$$p'_{r,x} = -p'_{i,x}$$

$$p'_{r,y} = p'_{i,y}$$

Das transformações relativísticas

$$p'_{i,x} = \gamma \left(p_{i,x} - \beta \frac{E_i}{c} \right) = \gamma \left(-p_i \cos \theta_i - \beta \frac{E_i}{c} \right)$$

$$E'_i = \gamma (E_i - \beta c p_{i,x}) = \gamma (E_i + \beta c p_i \cos \theta_i)$$

Da conservação da energia e o momento. Em S'

$$E'_i = E'_f = E'_r$$

$$p'_{r,x} = -p'_{i,x} = -\gamma \left(-p_i \cos \theta_i - \beta \frac{E_i}{c} \right)$$

C.2 - 2,5 pontos

Em S ,

$$p_{r,x} = \gamma \left(p'_{r,x} + \beta \frac{E'_r}{c} \right)$$

$$E_r = E_f = \gamma (E'_f + V p'_{r,x})$$

Substituindo $p'_{r,x}$ e $E'_r = E'_i$ na equação de $p_{r,x}$

$$p_{r,x} = \gamma \left[-\gamma \left(-p_i \cos \theta_i - \beta \frac{E_i}{c} \right) + \frac{\beta}{c} \gamma (E_i + V p_i \cos \theta_i) \right]$$

Trabalhando e usando $E_i = mc^2$, $p_i = m u_i$, chegamos a seguinte expressão para a componente x do momento final (“refletido”) em função da energia e velocidades iniciais

$$p_{r,x} = \gamma^2 E_i \left[\frac{2\beta}{c} + \frac{u_i}{c^2} \cos \theta_i (1 + \beta^2) \right]$$

Aqui $\beta = \frac{V}{c}$ é o fator referente às transformações de Lorentz.

Para a energia final:

$$E_r = E_f = \gamma (E'_f + V p'_{r,x}) = \gamma (E'_i - V p'_{i,x})$$

usando as conservações da energia e a componente x do momento em E' . Substituindo E'_i e $p'_{i,x}$, com um pouco de álgebra, obtemos a energia final

$$E_f = E_i \left[\frac{1 + 2\beta \frac{u_i}{c} \cos \theta_i + \beta^2}{1 - \beta^2} \right]$$

Marking scheme

C.1.

0,5 ponto pela expressão de $p'_{i,x}$

0,5 ponto pela expressão de E'_i

0,5 ponto pela expressão de $p'_{r,x}$

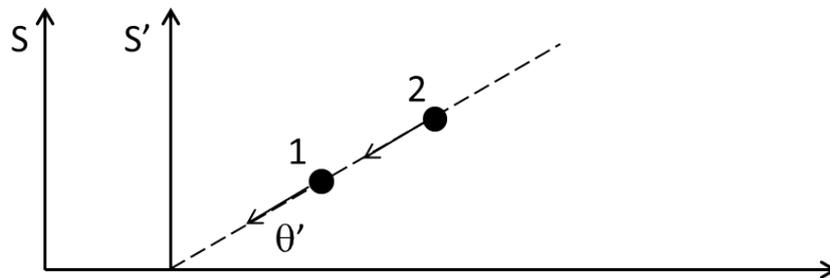
C.2.

1,5 pontos por chegar à expressão de $p_{r,x}$ em função de γ , E_i , β , u_i e θ_i

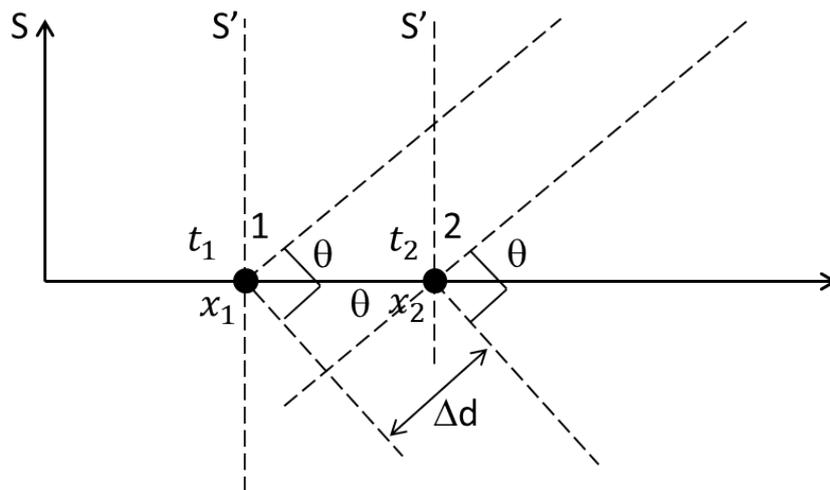
1,0 ponto pelas substituições de E'_i e $p'_{i,x}$ expressão de E_r e chegar à expressão final.

C.3 - 3,0 pontos

As partículas 1 e 2, inicialmente, “viajam” ao encontro da nuvem.



No instante da colisão, em S' , suas coordenadas são $(ct'_1, 0, 0, 0)$ e $(ct'_2, 0, 0, 0)$, respectivamente. Enquanto que em S , são $(ct_1, x_1, 0, 0)$ e $(ct_2, x_2, 0, 0)$, ou seja, as colisões das partículas 1 e 2 acontecem em pontos diferentes do eixo X do referencial S , ver figura abaixo.



Então, o atraso temporal entre as duas partículas é, a partir da figura acima

$$\Delta t = t_2 + \delta t - t_1 = t_2 + \frac{\Delta d}{u} - t_1 = t_2 + \frac{(x_2 - x_1) \cos \theta_i}{u} - t_1 \quad (I)$$

As transformações de Lorentz para o espaço-tempo

$$ct_j = \gamma \left(ct'_j + \frac{V}{c} x'_j \right)$$

$$x_j = \gamma (x'_j + V t'_j)$$

Aqui, o subíndice “j” representa os instantes 1 e 2, ou seja $j = 1, 2$. Usando as transformações, e sabendo que $x'_1 = x'_2 = 0$

$$\Delta t = \gamma t'_2 + \frac{1}{u}(x_2 - x_1) \cos \theta_i - \gamma t'_1$$

$$x_2 - x_1 = \gamma v t'_2 - \gamma v t'_1 = \gamma (t'_2 - t'_1)$$

Então, depois de simples trabalho algébrico

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \left(1 + \frac{V}{u} \cos \theta_i \right) \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \gamma \left(1 + \frac{V}{u} \cos \theta_i \right) = \frac{T'}{T}}$$

Marking scheme

C.3.

1,0 ponto pela expressão inicial correta de Δt (Eq. (I))

1,5 ponto por usar as transformações relativísticas e chegar às expressões de $x_2 - x_1$ em função dos instantes medidos em S' .

0,5 ponto por chegar à expressão final.

C.4 - 2,0 pontos

$$\Delta E = E_f - E_i = E_i \left[\frac{1 + 2\beta \frac{u_i}{c} \cos \theta_i + \beta^2}{1 - \beta^2} - 1 \right]$$

Usamos aqui o resultado do item C.1. Alguns passos algébricos e chegamos a

$$\frac{\Delta E}{E_i} = \left[\frac{2\beta \frac{u_i}{c} \cos \theta_i + 2\beta^2}{1 - \beta^2} \right]$$

$$(1 - \beta^2)^{-1} \approx 1 + \beta^2$$

Assim

$$\delta E = \frac{\Delta E}{E_i} \approx \dots = \frac{2\beta u_i}{c} \cos \theta_i + 2\beta^2 + \frac{2\beta^3 u_i}{c} \cos \theta_i + 2\beta^4 \approx 2\beta(\beta + \cos \theta_i)$$

Então

$$\langle \delta E \rangle \approx 2\beta^2 + 2\beta \langle \cos \theta_i \rangle$$

Usando $\langle \cos \theta_i \rangle = \frac{\int \cos \theta_i dP}{\int dP} = \frac{\int \cos \theta (1 + \beta \cos \theta) d \cos \theta \int d\phi}{\int (1 + \beta \cos \theta) d \cos \theta \int d\phi} = \frac{\int_{-1}^{+1} x(1 + \beta x) dx}{\int_{-1}^{+1} (1 + \beta x) dx} = \frac{\beta}{3}$, aqui $x = \cos \theta$, substituindo...

$$\boxed{\langle \delta E \rangle \approx \frac{8}{3} \beta^2}$$

Marking scheme

C.4.

0,5 ponto pela expressão da flutuação de energia $\frac{\Delta E}{E_i}$

1,0 ponto por encontrar $\langle \delta E \rangle$ em função do $\langle \cos \theta_i \rangle$

0,5 ponto por chegar à expressão final para $\langle \delta E \rangle$.

Parte D - Espectro de difusão dos raios cósmicos devido às colisões (3,0 pontos)

Os raios cósmicos, devido às colisões aleatórias com as nuvens, difundem-se ao longo de suas trajetórias até a Terra. Dessa forma, a propagação de um conjunto de partículas, partindo da sua fonte, na origem, pode ser descrito por um processo de difusão.

Considere $N(E, \vec{r}, t)$ a densidade volumétrica de partículas com energia E em função da posição e o tempo, por unidade de energia, cuja equação de difusão é dada por

$$\frac{dN}{dt} = D\nabla^2 N + \frac{\partial}{\partial E}[b(E)N] - \frac{N}{\tau_c} + Q(E). \quad (2)$$

Na expressão acima, D é o coeficiente de difusão, $b(E) = -\frac{dE}{dt}$ é a taxa de variação temporal da energia da partícula na colisão, $\frac{N}{\tau_c}$ representa a taxa de decaimento da partícula da região de difusão, sendo τ_c , o tempo característico deste processo, e $Q(E)$ é um termo que diz respeito ao ingresso ou criação de partículas, provenientes de fontes na região de difusão.

D.1 Simplique a equação 2 considerando que o processo é homogêneo, estacionário e sem fontes ou sumidouros de novas partículas. Justifique. 1,0pt

D.2 Usando a resposta do item anterior, mostre que este modelo de propagação de raios cósmicos através destas colisões aleatórias conduz a um processo de difusão capaz de reproduzir um espectro na forma de uma lei de potência que pode ser escrita como 2,0pt

$$N = CE^{-\gamma},$$

em que C é uma constante de integração, $\gamma = 1 + \frac{1}{\alpha\tau_c}$, com $\alpha = \frac{8}{3} \frac{V^2}{cL}$, sendo L , o caminho percorrido pelas partículas entre colisões separadas temporalmente um $\Delta t \sim \frac{L}{c}$.

Gabarito:

D.1 1,0 ponto

A equação de difusão, nas condições apresentadas (processo homogêneo, estacionário e sem fontes nem sumidouros) $\frac{dN}{dt} = 0$, $Q(E) = 0$ e $\nabla^2 N = 0$, fica

$$\frac{\partial}{\partial E}[b(E)N] - \frac{N}{\tau_c} = 0$$

D.2 2,0 pontos

Da parte C, sabemos que $\Delta E = \frac{8}{3}\beta^2 E$, então

$$-\frac{dE}{dt} = b(E) \approx \frac{-(8/3)\beta^2 E}{\Delta t} = -\frac{8}{3}\beta^2 \frac{Ec}{L}$$

Aqui usamos $\Delta t \sim dt \sim \frac{L}{c}$.

$$\beta^2 = \frac{V^2}{c^2} \Rightarrow -\frac{dE}{dt} = b(E) = -\frac{8}{3} \frac{V^2}{c^2} \frac{Ec}{L} = -\frac{8}{3} \frac{V^2}{cL} E = -\alpha E$$

Daí, na equação simplificada

$$\frac{d}{dE}[-\alpha EN] = -\alpha \left[N + E \frac{dN}{dE} \right] = \frac{N}{\tau_c}$$

$$E \frac{dN}{dE} = -N \left[1 + \frac{1}{\alpha\tau_c} \right] = -\gamma N$$

Finalmente, separando variáveis e integrando

$$N = CE^{-\gamma}$$

Marking scheme

D.1.

0,25 ponto por justificar dN/dt nulo (estacionario)

0,25 ponto por declarar $Q(E)$ nulo (sem fontes)

0,25 ponto por declarar laplaciano nulo (homogeneidade, estacionariedade)

0,25 ponto pela equação de difusão simplificada:

$$\frac{\partial}{\partial E}[b(E)N] - \frac{N}{\tau_c} = 0$$

Observação O estudante que apenas anule os termos, sem justificar não terá pontuação neste item.

D.2.

1,5 ponto por chegar à equação diferencial

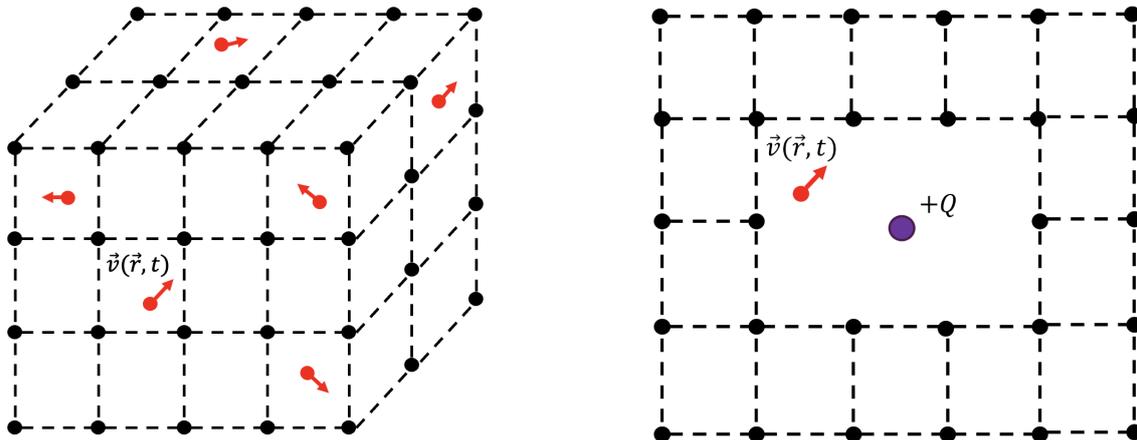
$$E \frac{dN}{dE} = -N \left[1 + \frac{1}{\alpha\tau_c} \right] = -\gamma N$$

0,5 ponto pelo resultado final

$$N = CE^{-\gamma}$$

Q3 - Blindagem eletrostática num gás de elétrons (10 pontos)

Neste problema, estudaremos um modelo de um gás de elétrons e seu comportamento “dielétrico” na presença de campos externos. Para modelar este gás, considere um meio de **cargas positivas fixas** e **cargas negativas móveis**, como os elétrons. Veja a Fig. 2a. Assumiremos que a densidade volumétrica das cargas positivas é n e a densidade média de elétrons também é n , tal que a densidade de carga total média é nula na ausência de campos externos.



(a) O gás de elétrons permeando o meio de cargas positivas.

(b) A presença de uma impureza na origem.

Figura 2: **a)** Modelo de um metal com cargas positivas fixas (preto) e um gás de elétrons (vermelho).
b) A presença de uma impureza com carga $+Q$ (roxo) no centro do metal (apenas para a **Parte B**).

Parte A - Ondas de densidade (5,0 pontos)

Neste modelo, flutuações da densidade de carga do gás produzem campos elétricos que, por sua vez, afetam o movimento das cargas. Para modelar este fenômeno, considere uma perturbação δ na densidade volumétrica de elétrons no gás:

$$\rho(\vec{r}, t) = n + \delta(\vec{r}, t), \text{ tal que } \delta \ll n.$$

Seja $\vec{E}(\vec{r}, t)$ a flutuação do campo elétrico associado à flutuação de carga $\delta(\vec{r}, t)$.

A.1 Relacione a perturbação da densidade eletrônica δ , o campo \vec{E} e suas derivadas espaciais. Dê sua resposta em função da carga $-e$ do elétron e da permissividade ϵ_0 do vácuo. 1,0pt

Gabarito:

A.1. Pela Lei de Gauss na perturbação da densidade e do campo, temos imediatamente que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -e \cdot \frac{\delta(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (3)$$

Marking Scheme:

- +1.0 Pontos Lei de Gauss.
- -0.2 Sinal errado.

Naturalmente, este campo elétrico gera uma força elétrica adicional no gás, que por sua vez afeta seu movimento. Seja $\vec{v}(\vec{r}, t)$ a velocidade das partículas do gás (Veja a Fig. 2a).

A.2 Relacione a densidade δ , a velocidade \vec{v} , e suas derivadas temporais e espaciais, aplicando conservação de fluxo (de massa). Dê sua resposta em função de n . Lembre-se de assumir $\delta \ll n$. 1,0pt

Gabarito:

A.2. Por conservação de fluxo, temos que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \quad (4)$$

Usando que $\rho = n + \delta$ e mantendo termos até primeiro ordem na perturbação temos que:

$$\frac{\partial \delta(\vec{r}, t)}{\partial t} = -n \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (5)$$

Marking Scheme:

- +1.0 Pontos Conservação de Fluxo
- -0.2 Sinal errado.

Agora, estudaremos as forças geradas no gás de elétrons e sua equação de movimento. Assumiremos que a pressão do gás depende apenas de sua densidade $P(\vec{r}, t) \equiv P(\rho(\vec{r}, t))$. Deixe as suas respostas dos itens seguintes em função do “módulo de elasticidade volumétrica” do gás:

$$\gamma \equiv n \cdot \left. \frac{dP}{d\rho} \right|_{\rho=n} \quad (6)$$

A.3 Escreva a equação de movimento das partículas do gás, relacionando a densidade δ , a velocidade \vec{v} , o campo \vec{E} e suas derivadas temporais e espaciais. Deixe sua resposta em função de e , n , ϵ_0 , γ , e a massa m do elétron. 1,0pt

Gabarito:

A.3 O gradiente de pressão aplica uma força no elétron:

$$\nabla P \approx \left. \frac{dP}{d\rho} \right|_{\rho=n} \nabla \delta = \frac{\gamma}{n} \cdot \nabla \delta \quad (7)$$

Onde usamos a definição do “módulo de elasticidade volumétrica” do gás. A equação de movimento é dada pela segunda lei de Newton:

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e \vec{E} - \frac{1}{n} \vec{\nabla} P = -e \vec{E} - \frac{\gamma}{n^2} \vec{\nabla} \delta \quad (8)$$

Marking Scheme:

- +0,5 Pontos pela contribuição da força devido a pressão
- +0,5 Pontos pela equação de movimento final

No item seguinte, mostraremos que estas perturbações na densidade de carga se comportam como ondas!

A.4 Mostre que a perturbação na densidade $\delta(\vec{r}, t)$ do gás satisfaz a uma equação de onda: 1,0pt

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = c_1 \nabla^2 \delta + c_2 \delta. \quad (9)$$

Encontre c_1, c_2 em função de e, n, ϵ_0, γ e m .

Gabarito:

A.4 Para simplificar as três equações acima, comece tirando o divergente da equação de movimento. Obtemos:

$$m \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\gamma}{n^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \delta \quad (10)$$

Reconhecendo que o lado esquerdo nada mais é que a derivada em relação ao tempo da equação de conservação de fluxo, o segundo termo é a Lei de Gauss, e que $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \delta = \nabla^2 \delta$, obtemos:

$$-\frac{m}{n} \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = \frac{e^2}{\epsilon_0} \delta - \frac{\gamma}{n^2} \nabla^2 \delta \quad (11)$$

Logo:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = \frac{\gamma}{mn} \nabla^2 \delta - \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \delta = c_1 \nabla^2 \delta + c_2 \delta \quad (12)$$

Concluimos que:

$$c_1 = \frac{\gamma}{mn}, \quad c_2 = -\frac{ne^2}{m\epsilon_0} \quad (13)$$

Marking Scheme:

- +0,5 Pontos por obter o divergente da equação de movimento
- +0,5 Pontos por obter c_1, c_2
- -0,2 Pontos por cada sinal errado, a **não ser que já tenha perdido nas partes anteriores.**

A.5 Encontre a relação de dispersão do gás $\omega(k)$, ou seja, relacione a frequência angular ω com o número de onda \vec{k} , destas ondas de densidade. Escreva sua resposta em função de (c_1, c_2) ou de $(e, n, \epsilon_0, \gamma$ e $m)$. 1,0pt

Gabarito:

A.5. Para a relação de dispersão, digamos que $\delta(\vec{r}, t) = A \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$. Usando isso na equação acima, obtemos:

$$-A\omega^2 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) = -c_1 |\vec{k}|^2 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) + c_2 A \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \quad (14)$$

$$-\omega^2 = -c_1 |\vec{k}|^2 + c_2 \Rightarrow \omega^2 = c_1 |\vec{k}|^2 - c_2 \quad (15)$$

Assim, $\omega = \sqrt{c_1 k^2 - c_2}$ é a relação de dispersão nesse modelo.

Marking Scheme:

- +0,5 Pontos Por tentar $\delta(\vec{r}, t) \propto \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$, $\text{sen}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ ou $\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$.
- +0,5 Pontos Por obter $\omega(\vec{k})$ em função de c_1, c_2 **ou** de $\gamma, m, n, \epsilon_0, e$.

Parte B - Campos externos e efeitos dielétricos (5,0 pontos)

Considere o mesmo sistema de cargas negativas móveis e cargas positivas fixas da Parte A. Neste problema, estudaremos o efeito de um potencial elétrico externo estático $\phi_{ext}(\vec{r})$ aplicado no gás.

- B.1** Encontre a nova equação de movimento do sistema. Deixe sua resposta em função de $\phi_{ext}(\vec{r}), \delta$, suas derivadas temporais e espaciais e as constantes da Parte A. 0,5pt

Gabarito:

B.1 A única modificação na equação é a adição de uma força elétrica devido ao campo externo.

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E} - e\vec{E}_{ext} - \frac{\gamma}{n^2} \vec{\nabla} \delta \quad (16)$$

Marking Scheme:

- +0,5 Pontos Pela modificação de $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$
- Novamente, não se perde ponto se propagar um sinal \pm errado acima.

Note que o sistema ainda satisfaz uma equação de onda, com uma correção que depende de ϕ_{ext} . Estas ondas de densidade podem ter várias soluções, inclusive com ω e \vec{k} que *violam* a relação de dispersão da Parte A. Nos itens a seguir, estudaremos apenas campos elétricos estáticos (ou seja, em função de r , mas não t) e seus efeitos estáticos (ou seja, $\omega = 0$).

- B.2** Assuma que o potencial externo seja da forma $\phi_{ext}(\vec{r} = (x, y, z)) = E_0 x$, em que E_0 é uma constante. Encontre o campo elétrico resultante $\vec{E}_{tot}(\vec{r})$ em todo o espaço. 0,5pt

Gabarito:

B.2 Se assumirmos uma solução estática (onde $\omega = 0$), δ e \vec{v} são funções apenas de \vec{r} .

Se o campo externo é uniforme, a equação de onda da parte A.4 não sofre modificações. Pela relação de dispersão da parte A.5, não há soluções onde $\omega = 0$; então de fato $\delta(\vec{r}) = 0$ e $\vec{v}(\vec{r}) = 0$. Logo, a equação de movimento nos mostra que $\vec{E} = -\vec{E}_{ext}$, tal que o campo resultante é 0. Dessa forma, o potencial elétrico resultante é apenas $\Phi_{tot}(\vec{r}) = \Phi_0$, para uma constante Φ_0 .

Marking Scheme:

- +0,5 Pontos Por notar que o campo potencial final deve ser constante

- B.3** Assuma que o potencial elétrico externo oscila conforme a equação $\phi_{ext}(\vec{r}) = \phi_0 e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}$, em que ϕ_0 e \vec{q} são constantes. Determine o potencial elétrico total em todo o espaço, a menos de uma constante aditiva. 1,0pt

Gabarito:

B.3. Reproduzindo o argumento da parte **B.2**, considere o divergente da equação de movimento assumindo que $\partial_t \vec{v} = 0$. Primeiro, calculemos o divergente do campo externo. Note que podemos assumir que $\vec{q} = q\hat{x}$

$$\nabla \cdot \vec{E}_{ext} = -\nabla \cdot \nabla \phi_{ext}(\vec{r}) = -\phi_0 \nabla^2 \left(e^{iqx} \right) = \phi_0 q^2 e^{iqx} \quad (17)$$

Agora, considere uma solução $\delta(\vec{r}) = A e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}$ para a equação de movimento:

$$\left(\frac{\gamma}{n^2} \nabla^2 - \frac{e^2}{\epsilon_0} \right) \delta = e \nabla \cdot \vec{E}_{ext} \quad (18)$$

$$A \left(-\frac{\gamma}{n^2} q^2 - \frac{e^2}{\epsilon_0} \right) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} = e \phi_0 q^2 e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \Rightarrow A = -\frac{en^2 \phi_0}{\gamma} \cdot \frac{q^2}{q^2 + \frac{n^2 e^2}{\gamma \epsilon_0}} \quad (19)$$

Novamente na equação de movimento, se conclui que o campo elétrico total é dado por:

$$-\nabla \Phi_{tot}(\vec{r}) = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{int} = \frac{\gamma}{en^2} \nabla \delta \Rightarrow \quad (20)$$

$$\Phi_{tot}(\vec{r}) = -\frac{\gamma}{en^2} \delta(\vec{r}) + \text{const} = \phi_0 \cdot \frac{q^2}{q^2 + \frac{n^2 e^2}{\gamma \epsilon_0}} + \text{const} \quad (21)$$

Marking Scheme:

- +1,0 Pontos Por escrever que $\delta(r)$ oscila e obter o resultado final para o campo oscilante

Nos itens seguintes, estudaremos o caso em que o campo externo é causado por uma impureza no metal. Para modelar a impureza, considere uma carga pontual $+Q$ centrada em $r = 0$. Veja a Fig.2 **b**. Nessa situação, o campo externo é dado pela lei de Coulomb:

$$\phi_{ext}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

B.4 Mostre que o potencial elétrico resultante $\Phi_{tot}(\vec{r})$ é dado por 2,0pt

$$\Phi_{tot}(\vec{r}) = d_1 \frac{e^{-d_2 r}}{r^{d_3}} + d_0, \quad (22)$$

e encontre as constantes d_1, d_2, d_3 em função de e, n, ϵ_0, γ e m . (**Não** $d_0!$)

Dica: Este potencial elétrico pode ser escrito como uma combinação linear de ondas. Utilize o seu resultado do item **B.3** e a seguinte integral:

$$\frac{2\pi^2}{r} e^{-br} = \int \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{k}}{k^2 + b^2}, \text{ com } b \geq 0. \quad (23)$$

Gabarito:

B.4 Primeiro, escreveremos a transformada de fourier de $\Phi_{tot}(\vec{r})$ é, utilizando a integral dada na Dica (onde $b = 0$):

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{k}}{k^2} \quad (24)$$

Ou seja, o potencial de Coulomb é equivalente a uma composição de ondas cada um com amplitude $\frac{Q}{8\pi^3\epsilon_0} \frac{1}{k^2}$. Sabemos que cada componente dessa combinação linear de ondas, contribui para o potencial total como no item **c**). Note que esse é o termo de ϕ_0 acima. Por linearidade, o potencial total é dado por:

$$\Phi_{tot}(\vec{r}) = \underbrace{\int d^3\vec{k} \cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}_{\text{Soma sobre ondas}} \cdot \underbrace{\left(\frac{Q}{8\pi^3\epsilon_0} \frac{1}{k^2}\right)}_{\text{Amplitude } \phi_0(k)} \cdot \underbrace{\left(\frac{k^2}{k^2 + \frac{e^2 n^2}{\gamma\epsilon_0}}\right)}_{\text{Resposta } \Phi_{tot}(k)} = \frac{Q}{8\pi^3\epsilon_0} \cdot \int \frac{d^3\vec{k} \cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{k^2 + \frac{e^2 n^2}{\gamma\epsilon_0}} \quad (25)$$

Definindo $\lambda^2 = \frac{\gamma\epsilon_0}{e^2 n^2}$, podemos re-utilizar a integral dada na dica, onde $b = 1/\lambda$:

$$\Phi_{tot}(\vec{r}) = \frac{Q}{8\pi^3\epsilon_0} \cdot \int \frac{d^3\vec{k} \cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{k^2 + \frac{1}{\lambda^2}} = \frac{Q}{8\pi^3\epsilon_0} \cdot \frac{2\pi^2}{r} e^{-r/\lambda} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda} \quad (26)$$

Logo, o potencial final, a par de uma constante d_0 , é simplesmente um potencial de Coulomb multiplicado por uma exponencial. Note que

$$d_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}, \quad d_2 = \frac{1}{\lambda} = \frac{en}{\sqrt{\gamma\epsilon_0}}, \quad d_3 = 1. \quad (27)$$

Marking Scheme:

- +1,0 Pontos Por notar que o campo de Coulomb pode ser escrito como uma combinação linear de ondas
- +1,0 Pontos Por integrar Φ_{tot} e obter a expressão correta

O fato de que $d_2 > 0$, implica um efeito de “blindagem” (em inglês, screening), onde o campo elétrico da impureza é atenuado.

B.5 Calcule a magnitude do campo total $|\vec{E}_{tot}(\vec{r})|$ e deixe sua resposta em função das constantes d_1, d_2, d_3 . 0,5pt

Gabarito:

B.5. Podemos obter o campo com a derivada de $\Phi_{tot}(\vec{r})$, assim obtemos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda} \right) e^{-r/\lambda} \quad (28)$$

Marking Scheme:

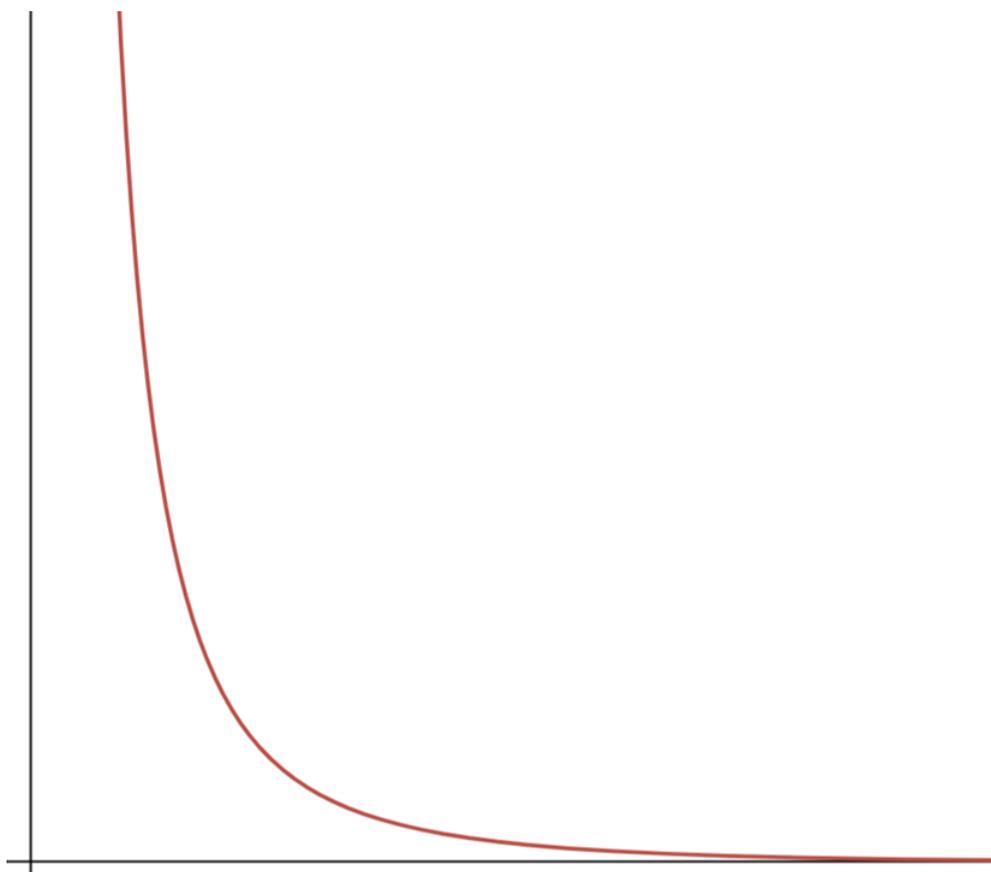
- +0,5 Pontos Pela derivada do potencial e obter o campo corretamente

B.6 Esboce $|\vec{E}_{tot}(\vec{r})|$ em função de r . Compare-o com o decaimento $\propto 1/r^2$ e explique qualitativamente o formato da curva. 0,5pt

Gabarito:

B.6.

O esboço do campo esta abaixo:



A intuição é apenas que temos um efeito de blindagem porque algumas cargas negativas do gas de eletrons vão se aproximar a carga positiva causando um efeito de blindagem, fazendo com que "efetivamente" a longas distancias a carga $+Q$ é menor. Isso faz com que o campo eletrico a longas distancias cai mais rapido que $1/r^2$.

Marking Scheme:

- +0,5 Pontos Pela intuição de blindagem e esboço correta

Q4 - Elementos de Computação Quântica (10 pontos)

Estudaremos neste problema o algoritmo de Grover, um algoritmo quântico de busca. Considere uma função $f : \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \{0, 1\}$ que mapeia inteiros de 1 a N , para 0 ou 1 com uma propriedade específica: existe apenas um número $1 \leq s \leq N$ tal que $f(s) = 1$ e para todos os outros números $x \neq s$, $f(x) = 0$. Nosso objetivo é descobrir (ou buscar) o valor de s . Num computador clássico, sem saber mais nada de f , o único jeito de encontrar s é computar $f(x)$ para todo valor de x até obter um valor diferente de zero. O tempo que isso leva é proporcional ao número de elementos do domínio da função N .

Em um computador quântico, podemos determinar o valor de s com um número menor de operações. Para entender como, comecemos explorando conceitos básicos de mecânica quântica. Um estado quântico nada mais é que um vetor $\vec{\psi}$, de N entradas complexas

$$\vec{\psi} = (a_1, a_2, \dots, a_N),$$

que satisfazem a condição $\sum_{i=1}^N |a_i|^2 = 1$. Imagine, por exemplo, um vetor de distribuição de probabilidade uniforme

$$\vec{\text{unif}} = \frac{1}{\sqrt{N}}(1, 1, \dots, 1).$$

Esses estados quânticos podem ser vistos como vetores em um espaço N -dimensional.

A informação em $\vec{\psi}$ está contida nos N coeficientes complexos a_i , porém, não podemos acessá-lo sem *medir* $\vec{\psi}$. Medir $\vec{\psi}$ **colapsa** o estado de superposição num estado base $\vec{n}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (onde apenas a k -ésima entrada é 1) e, com probabilidade $|a_k|^2$, tem como resultado o número k . Neste contexto, encontrar a solução s corresponde a medir um estado quântico e obter o estado base \vec{s} , colapsado, solução da nossa busca.

O algoritmo de Grover começa com a *sobreposição uniforme* de todos os números de entrada, $\vec{\psi}_0 = \vec{\text{unif}}$. Em seguida, o estado evolui via uma série de reflexões repetidas no espaço N -dimensional associado a esses estados quânticos.

Felizmente, para entender essas reflexões, basta entender como o estado evolui num plano bidimensional (Fig. 3a). Esse plano tem dois eixos: a solução \vec{s} e o estado $\vec{\text{nonsols}}$, que representa a sobreposição uniforme de todos os números, *exceto* s . É possível definir ângulos entre os diferentes estados quânticos seguindo a analogia geométrica proposta.

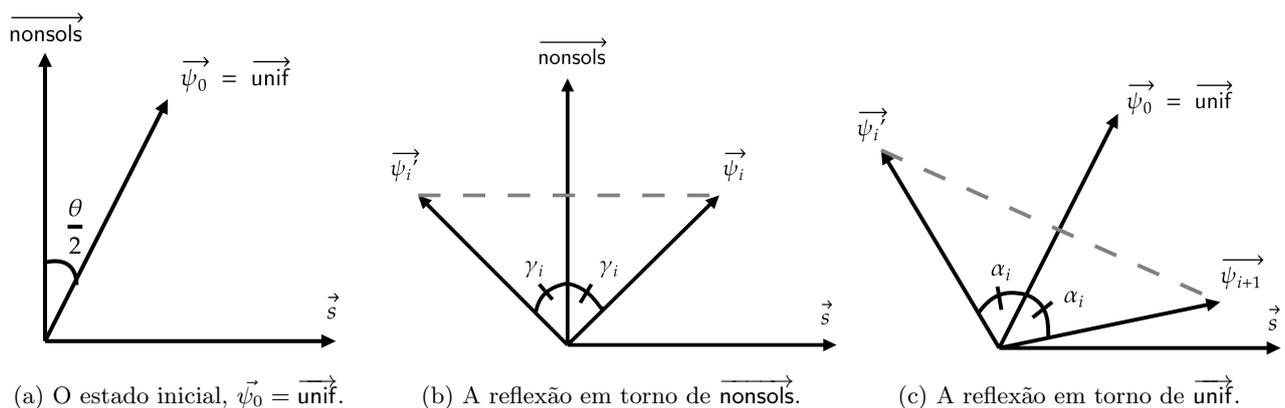


Figura 3: O algoritmo de Grover evolui num espaço bidimensional.

A.1	Descreva os N coeficientes do estado $\vec{\text{nonsols}}$. Encontre o produto escalar $\vec{\text{nonsols}} \cdot \vec{s}$.	1,5pt
A.2	Assumindo que $N \gg 1$, calcule o valor do ângulo entre $\vec{\text{nonsols}}$ e $\vec{\text{unif}}$. Isto é, encontre $\frac{\theta}{2}$, definido na Figura 3a.	1,5pt

A cada iteração do algoritmo de Grover, o estado de entrada $\vec{\psi}_i$ é transformado no estado $\vec{\psi}_{i+1}$. A cada iteração, duas operações são aplicadas sobre o estado $\vec{\psi}$:

- I. uma reflexão do estado quântico com respeito $\overrightarrow{\text{nonsols}}$;
- II. uma reflexão com respeito a $\overrightarrow{\text{unif}}$.

Ilustrações dessas duas operações são fornecidas pelas Fig. 3b e Fig. 3c, respectivamente.

A.3 Seja γ_i o ângulo entre o estado $\vec{\psi}_i$ e $\overrightarrow{\text{nonsols}}$. Encontre γ_{i+1} , em termos de γ_i e θ . 3,0pt

A.4 Após T iterações, qual a probabilidade de medirmos o estado \vec{s} ? Qual deve ser o valor de T que maximiza essa probabilidade e qual o valor dela? Compare seu resultado com um computador clássico. 4,0pt

Gabarito:

A.1.

Dado que S é a superposição uniforme de todos os estados sem x^* , temos que S deve ser da forma:

$$S = a \cdot (1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1) \tag{29}$$

Onde a entrada x^* do vetor acima é a única com valor 0, e a é tal que $(N-1)|a|^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{N-1}}$.

O produto escalar $\overrightarrow{\text{nonsols}} \cdot \vec{s} = 0$ pode ser determinado por inspeção direta, indicando que esses vetores são ortogonais.

- +0.50 Pts. Entender que a s -ésima entrada é 0, e as demais 1.
- +0.50 Pts. Normalizar corretamente.
- +0.50 Pts. Cálculo do produto interno.

A.2.

Como ψ_0 é a superposição uniforme de todos os estados, temos que:

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{N}}(1, 1, 1 \dots 1, \dots, 1) \tag{30}$$

Note que a componente de ψ_0 na direção x^* é $\frac{1}{\sqrt{N}}$, logo:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{N}} \Rightarrow \frac{\theta}{2} \approx 1/\sqrt{N} \tag{31}$$

Marking Scheme:

- +1.0 Pts. O ângulo é determinado pelo produto escalar entre vetores $\overrightarrow{\text{unif}}$ e $\overrightarrow{\text{nonsols}}$ ou \vec{s} .
- +0.5 Pts. Aproximação de pequenos ângulos + resposta final.

A.3.

Note que como o ângulo entre ψ'_i e S é γ_i , o ângulo entre ψ'_i e ψ_0 é $\gamma_i + \frac{\theta}{2}$. Logo, o ângulo entre o estado final ψ_{i+1} e ψ_0 também é $\gamma_i + \frac{\theta}{2}$. Assim, o ângulo γ_{i+1} entre ψ_{i+1} e S é:

$$\gamma_{i+1} = \gamma_i + \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} = \gamma_i + \theta \tag{32}$$

Ou seja, cada iteração do algoritmo rotaciona ψ_i por θ .

- +1.5 Pts. O valor de α_i , após a primeira reflexão.
- +1.5 Pts. O valor de γ_{i+1} , após a segunda reflexão.
- Alternativamente, +3.0 Pts apenas pela resposta final.

A.4.

Apos M iterações, o angulo entre S e ψ_M é $\gamma_M = \gamma_0 + M \cdot \theta = \theta \cdot (M + \frac{1}{2})$. E a probabilidade de medir x^* é:

$$\sin^2(\gamma_M) = \sin^2\left(\theta \cdot (M + \frac{1}{2})\right) \quad (33)$$

Para maximizar essa probabilidade, precisamos que $\theta(M + 1/2)$ seja o mais próximo de $\pi/2$ possível, logo:

$$M = \frac{\pi}{2\theta} - \frac{1}{2} \approx \frac{\pi}{4} \sqrt{N} \quad (34)$$

E a probabilidade de encontrar x^* , é no minimo $\sin^2(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}) = \cos^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{1}{N}$.

Notavelmente, esse resultado é *quadraticamente* melhor do que conseguimos em um computador clássico!

Marking Scheme:

- +1.5 Pts. Computar a probabilidade $|\vec{s} \cdot \vec{\psi}_M|^2 = \sin^2(\theta \cdot T)$ de medir a solução \vec{s} em função de T .
- +0.75 Pts. Escolher $T \approx \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{N}$
- +0.75 Pts. Computar a probabilidade nesse valor de T , $\approx \cos^2 \frac{\theta}{2} \approx 1$.
- +1.0 Pts. Notar que o algoritmo é quadraticamente mais rápido que o clássico.