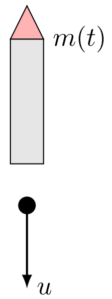
# Q1 - Física de foguetes (10 pontos)

Considere um foguete de massa inicial $m_0$, composto por um único estágio, que contém uma quantidade de material propelente de massa $m_c < m_0$. Durante a decolagem, iniciada no instante $t = 0$, o foguete expele gases resultantes da queima do combustível com velocidade constante $u$ em relação ao próprio foguete, de tal forma que a massa total do foguete pode ser descrita por uma função $m(t)$. A taxa de ejeção de massa por unidade de tempo é constante e igual a $\mu$. A aceleração local da gravidade pode ser assumida constante ao longo de todo o movimento e igual a $g$. Despreze efeitos de resistência do ar e considere que o movimento seja unidimensional ao longo da direção vertical.




O processo de decolagem é definido como o intervalo de tempo entre o instante $t = 0$ e o instante $T$, no qual o foguete lançado não dispõe de mais material para a sua propulsão. Com base na situação descrita acima, faça o que se pede nos itens a seguir.

| | | |
|---|---|---|
| **A1.** | Determine a duração $T$ do processo descrito. | 1,0pt |
| **A2.** | Determine a aceleração instantânea $a(t)$ do foguete com respeito ao referencial do solo. | 3,0pt |
| **A3.** | Determine a velocidade $v_{\max}$ atingida pelo foguete ao final do processo de queima do combustível. | 3,0pt |
| **A4.** | Estime a altura máxima atingida pelo foguete. | 3,0pt |

**Gabarito:**

**Item (a)**

A massa do foguete varia linearmente com o tempo:

$$m(t) = m_0 - \mu t \ .$$

O processo de queima termina quando toda a massa de propelente $m_c$ tiver sido expelida, isto é, quando $m(T) = m_0 - m_c = m_f$. Logo,

$$T = \frac{m_c}{\mu}.$$

**Critério de correção (1 pt).**

- 1 pt — apresentar a expressão correta.

**Item (b)**

A equação de movimento de um corpo de massa variável é

$$m(t)\,\frac{dv}{dt} = u\big(-\dot{m}\big) - m(t)g = u\mu - m(t)g.$$

Assim, a aceleração é

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{u\mu}{m(t)} - g = \frac{u\mu}{m_0 - \mu t} - g.$$

**Critério de correção (3 pt).**

- 1 pt - escrita da equação de foguete $m\, dv/dt = u(-\dot{m}) - mg$;
- 1 pt - substituição $\dot{m} = -\mu$ e $m(t) = m_0 - \mu t$;
- 1 pt - expressão final correta para $a(t)$.

**Item (c)**

Integrando a equação anterior de $t = 0$ a $t = T$ ($v(0) = 0$):

$$v_{\max} = u \ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right) - gT, \qquad m_f = m_0 - m_c, \qquad T = \frac{m_c}{\mu}.$$

Portanto

$$\boxed{v_{\max} = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m_c}\right) - g\,\frac{m_c}{\mu}}$$

**Critério de correção (3 pt).**

- 1 pt — integração correta do termo $u\mu/m(t)$;
- 1 pt - inclusão do termo gravitacional $-gT$;
- 1 pt - resposta final na forma acima.

**Item (d)**

A altura máxima $h_{\max}$ é a soma de duas contribuições:

$$h_{\max} = h_1 + h_2,$$

em que

- $h_1$ é a altura percorrida durante a queima do propelente;
- $h_2$ é a altura adicional em voo livre após o esgotamento do combustível.

**i) Altura em voo livre $h_2$.**

Ao término da queima ($t = T$) o foguete possui velocidade

$$v_{\max} = u \ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right) - g\frac{m_c}{\mu}, \qquad m_f \equiv m_0 - m_c.$$

Subindo somente sob a gravidade, ele se eleva até sua velocidade anular, o que fornece

$$h_2 = \frac{v_{\max}^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left[u \ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right) - g\,\frac{m_c}{\mu}\right]^2.$$

**ii) Altura durante a queima $h_1$.**

A velocidade instantânea no intervalo $0 \le t \le T$ é

$$v(t) = u \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) - gt, \qquad m(t) = m_0 - \mu t.$$

Logo,

$$h_1 = \int_0^T v(t)\,dt = \frac{u}{\mu}\Big[m_c - m_f \ln\!\Big(\tfrac{m_0}{m_f}\Big)\Big] - \frac{g}{2}\Big(\frac{m_c}{\mu}\Big)^2.$$

**iii) Altura total.**

$$\boxed{h_{\max} = h_1 + h_2 = \frac{u}{\mu}\Big[m_c - m_f \ln\!\Big(\tfrac{m_0}{m_f}\Big)\Big] - \frac{g}{2}\Big(\tfrac{m_c}{\mu}\Big)^2 + \frac{1}{2g}\Big[u \ln\!\Big(\tfrac{m_0}{m_f}\Big) - g\,\tfrac{m_c}{\mu}\Big]^2}.$$

**Critério de correção (3 pt).**

- **1 pt -** Expressão $h_2 = v_{\max}^2/(2g)$;
- **1 pt -** Indicação da obtenção de $h_1$ através de uma integração correta de $v(t)$ ;
- **1 pt -** Resultado final correto.

## Q2 - Cone de Mach (10 pontos)

Quando um objeto se move na atmosfera, ele gera ondas esféricas de pressão, ondas essas que se propagam com uma velocidade de módulo igual ao módulo da velocidade das ondas sonoras. Em particular, as cristas das ondas geradas pelo objeto ficam tão mais próximas umas das outras à frente do objeto e tão mais afastadas atrás dele quanto maior for o módulo da velocidade do objeto em relação à atmosfera. Se o módulo da velocidade do objeto, $v$, estiver próximo do módulo da velocidade das ondas sonoras, $c$, as cristas à frente se sobrepõem, formando uma crista única, de amplitude bem maior do que a amplitude de qualquer das ondas originais. Quando o objeto se move com velocidade de módulo igual ao módulo da velocidade das ondas sonoras, a crista única passa a ter uma amplitude muito grande e recebe o nome de onda de choque.

## Parte A: Cinemática de um pulso de perturbação em um meio - 4 pontos

Suponha uma frente de propagação de uma perturbação em um tempo $t_0 = \tau$, na origem do referencial fixo $x - y$, como mostra a figura a seguir: A onda esférica, em um tempo $t > \tau$, possui seu centro, $O$, na posição

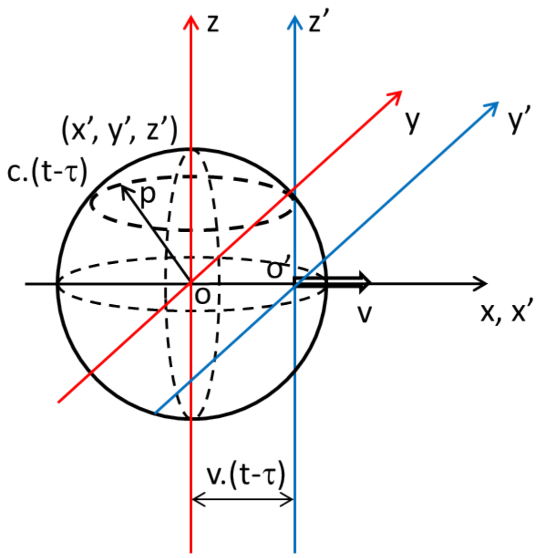



Figura 1: Pulso de onda esférica. Figura meramente ilustrativa.

$v.(t - \tau)$, em relação ao referencial $x' - y'$ ligado à fonte, $O'$, que se move com velocidade constante $v$. Aqui a velocidade $v$ é genérica, ou seja, pode ser maior, menor ou igual a $c$.

O número de Mach é uma medida adimensional que expressa a razão entre a velocidade de um objeto em relação à velocidade do som no meio em que ele se move

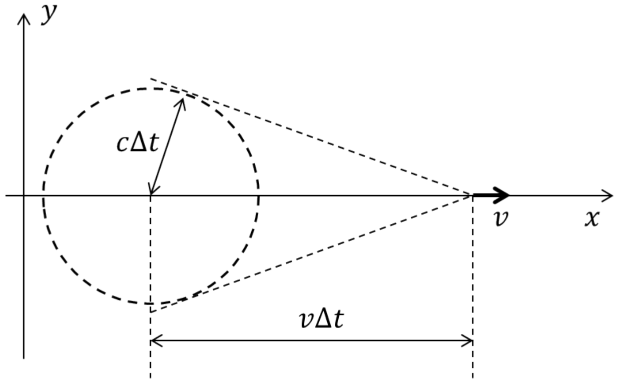
$$M = \frac{v}{c}.$$

Com base no valor de $M$, é possível classificar o regime de velocidade de aeronaves em voo. Quando $M < 0{,}8$, o regime é considerado *subsônico*; no intervalo $0{,}8 \leq M < 1{,}2$, denomina-se *transônico*; para $1{,}2 \leq M < 5{,}0$, o regime é *supersônico*; e, por fim, valores $M \geq 5{,}0$ caracterizam o regime *hipersônico*.

| | | |
|---|---|---|
| **A1.** | Encontre uma expressão para o tempo de "retardo", $\tau$, em função das coordenadas de um ponto $p$, $(x', y', z')$, pertencente à frente da onda, no referencial em movimento, no instante $t$, assim como do número de Mach $M$. | 4,0pt |

**Gabarito:**

A1. Em três dimensões (ver figura abaixo)




$$(c\Delta t)^2 = (x - v\Delta t)^2 + y^2 + z^2$$
$$c^2(t-\tau)^2 = [x^2 - v^2(t-\tau)^2 - 2xv(t-\tau)] + y^2 + z^2$$
$$(c^2 - v^2)(t-\tau)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xv(t-\tau)$$

de onde

$$\boxed{(c^2 - v^2)(t-\tau)^2 + 2xv(t-\tau) - r^2 = 0}$$

Resolvendo a equação de segundo grau acima, para $t - \tau$, temos, depois de alguns passos algébricos elementares, introduzindo $M = \frac{v}{c}$

$$\boxed{\tau = t - \frac{xM}{c(1-M^2)}\left[\sqrt{1 + \frac{r^2(1-M^2)}{x^2M^2}} - 1\right]}$$

**Critérios A1 - 4,0 pontos**

- 1,5 ponto pela figura

- 1,5 pontos pela equação de segundo grau
Obs: se alguém escreve a equação e não faz o desenho da figura, se entende que essa equação saiu de uma figura análoga e ganha todos os 3,0 pontos.

- 1,0 ponto pela expressão de $\tau$ em função das grandezas correspondentes.

## Parte B: Aviões supersônicos - 6 pontos

Considere agora um avião voando horizontalmente, com velocidade $v > c$. Nestas circunstâncias, a superfície envoltória das frentes dos pulsos da onda de som formam um cone (Cone de Mach), de semiabertura $\theta$, medida entre a superfície do cone e o seu eixo de simetria, relacionada com o número de Mach $M$.

Imaginemos um observador no solo, no mesmo plano vertical do avião, que escuta o som proveniente da aeronave, um tempo $t$ depois de tê-la visto passando acima da sua cabeça.

| | | |
|---|---|---|
| **B1.** | Encontre uma expressão para a altura $h$ a que voava o avião, em função de $t$, $c$ e $M$. | 2,0pt |

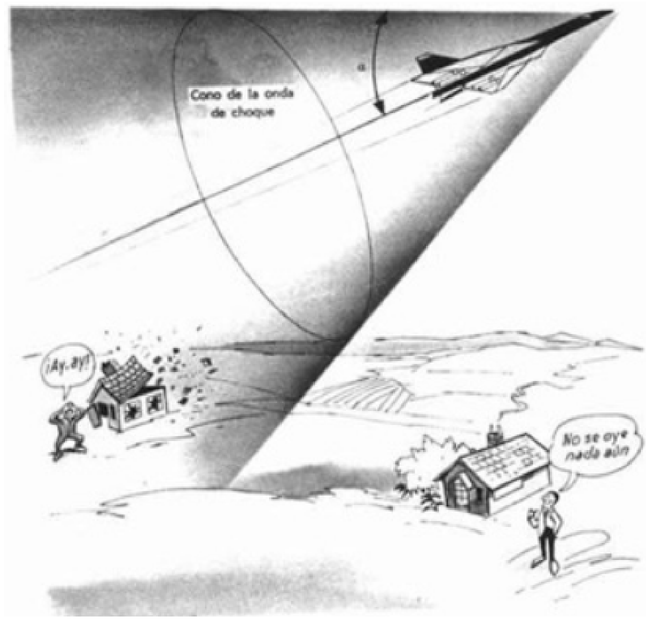
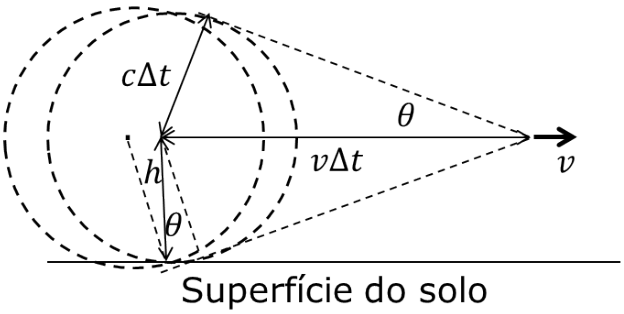



Figura 2: Ilustração de um avião supersônico viajando próximo a duas casas. A casa da esquerda é afetada pela onda de choque, enquanto a da direita não percebe o som produzido pela aeronave. (Imagem apenas ilustrativa.)

**Gabarito:**

B1. Da figura abaixo, segue que




$$\sin\theta = \frac{\sqrt{h^2 - c^2t^2}}{h} = \frac{c}{v}$$

Resolvendo, depois de passos simples, e substituindo a expressão de $M$

$$\boxed{h = \frac{ct}{\sqrt{1 - \frac{1}{M^2}}}}$$

**Critérios B1 - 2,0 pontos**

- 1,0 ponto pela figura

- 0,5 ponto pela relação trigonométrica

Obs: se alguém escreve a relação e não faz o desenho da figura, se entende que essa relação saiu de uma figura análoga e ganha todos os 1,5 pontos.

- 0,5 pontos pela expressão final, em função de $c$, $t$ e $M$.

Analisemos, desta vez, a situação em que um caça supersônico voa em linha reta, a uma altitude $z = 12000\ m$, com velocidade constante, $v = 680\ m/s$. A velocidade do som no ar pode ser considerada igual a $c = 340\ m/s$. Em $t = 0$, o avião passa diretamente sobre um ponto de coordenadas $x = y = 0$, no plano do solo, e continua voando na direção $x$, no sentido positivo. Um receptor acústico se encontra posicionado no solo no ponto de coordenadas $x_r = 5000\ m$ e $y_r = 3000\ m$.

**B2.** Determine o instante $T$ em que o som emitido pelo avião será detectado pelo receptor acústico. 4,0pt

**Gabarito:**

**Solução 1**

O som que chega ao receptor em um instante $T$ foi emitido em um instante anterior $t_e$, quando o avião estava em uma posição genérica

$$S(t_e) = (x{,}0{,}12000\ \text{m}), \quad x = v\,t_e,$$

enquanto o receptor está fixo em

$$R = (x_r{,}y_r{,}0) = (5000\ \text{m}, 3000\ \text{m}, 0).$$

A distância entre o avião e o receptor, no instante de emissão, é

$$d = d(x) = \sqrt{(x_r - x)^2 + y_r^2 + (12000\ \text{m})^2}.$$

O tempo entre a emissão e a detecção do som é

$$\Delta t = \frac{d}{c},$$

de modo que o tempo total, medido a partir de $t = 0$, é

$$T(x) = t_e + \Delta t = \frac{x}{v} + \frac{d(x)}{c}.$$

O som que o receptor ouve primeiro corresponde ao menor valor possível de $T(x)$. Assim, devemos minimizar $T(x)$ em relação a $x$. Derivando:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{v} + \frac{1}{c}\frac{d}{dx}\left[\sqrt{(x_r - x)^2 + y_r^2 + 12000^2}\right].$$

Como

$$\frac{d}{dx}\sqrt{(x_r - x)^2 + y_r^2 + 12000^2} = \frac{(x_r - x)(-1)}{d} = -\frac{x_r - x}{d},$$

temos

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{v} - \frac{x_r - x}{c\,d}.$$

A condição de mínimo é $\dfrac{dT}{dx} = 0$, isto é

$$\frac{1}{v} = \frac{x_r - x}{c\,d} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_r - x}{d} = \frac{c}{v} = \frac{1}{M}.$$

Neste problema, $v = 680$ m/s e $c = 340$ m/s, logo $M = \dfrac{v}{c} = 2$ e

$$\frac{x_r - x}{d} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad d = 2(x_r - x).$$

Por outro lado, pela definição de $d$,

$$d^2 = (x_r - x)^2 + y_r^2 + 12000^2.$$

Substituindo $d = 2(x_r - x)$, obtemos

$$4(x_r - x)^2 = (x_r - x)^2 + y_r^2 + 12000^2 \quad \Rightarrow \quad 3(x_r - x)^2 = y_r^2 + 12000^2.$$

Assim,

$$(x_r - x)^2 = \frac{y_r^2 + 12000^2}{3}.$$

Com $x_r = 5000$ m e $y_r = 3000$ m,

$$y_r^2 + 12000^2 = (3000 \text{ m})^2 + (12000 \text{ m})^2 = 9 \times 10^6 + 144 \times 10^6 = 153 \times 10^6,$$

$$(x_r - x)^2 = \frac{153 \times 10^6}{3} = 51 \times 10^6,$$

$$x_r - x = 1000\sqrt{51} \text{ m}.$$

Como o som responsável pelo “boom” é emitido quando o avião ainda está antes do receptor, temos $x_r - x > 0$, logo

$$x = x_r - 1000\sqrt{51} = 5000 - 1000\sqrt{51} \text{ m} \approx -2141 \text{ m}.$$

Este é o valor de $x$ pedido nos critérios (posição do avião, ao longo do eixo $x$, no instante em que o som que formará o cone de Mach é emitido).

A distância entre o avião e o receptor, nesse instante, é

$$d = 2(x_r - x) = 2 \cdot 1000\sqrt{51} = 2000\sqrt{51} \text{ m} \approx 1{,}43 \times 10^4 \text{ m}.$$

O tempo de emissão é

$$t_e = \frac{x}{v} = \frac{5000 - 1000\sqrt{51}}{680} \text{ s} \approx -3{,}15 \text{ s},$$

indicando que o som foi emitido alguns segundos antes do avião passar sobre a origem.

O tempo de propagação do som até o receptor é

$$\Delta t = \frac{d}{c} = \frac{2000\sqrt{51}}{340} \text{ s} \approx 42{,}0 \text{ s}.$$

Logo, o tempo total, medido a partir de $t = 0$, é

$$T = t_e + \Delta t = \frac{x}{v} + \frac{d}{c} \approx -3{,}15 \text{ s} + 42{,}0 \text{ s} \approx 38{,}8 \text{ s}.$$

Portanto,

$$\boxed{T \approx 3{,}9 \times 10^1 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad T \approx 38{,}8 \text{ s}.}$$

**Critérios B2 - 4,0 pontos**

- 2,0 pontos pelo cálculo de $x$ (posição do avião no instante de emissão relevante);
- 1,0 ponto pelo cálculo de $d$ (distância do ponto de emissão ao receptor);
- 1,0 ponto pelo cálculo de $T$ (tempo total entre $t = 0$ e a chegada do som).

**Solução 2**

Nesta abordagem, utilizamos diretamente a geometria do cone de Mach. A semiabertura do cone é dada por

$$\sin\theta = \frac{c}{v} = \frac{1}{M}.$$

Para este problema, $v = 680$ m/s, $c = 340$ m/s, logo

$$M = 2 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 30°.$$

Denote a posição do receptor por

$$R = (x_r, y_r, 0) = (5000, 3000, 0),$$

e a posição do avião, no instante em que emitiu o som que eventualmente atingirá o receptor, por

$$A = (x, 0, 12000).$$

O vetor que liga o avião ao receptor é

$$\Delta\vec{r} = R - A = (x_r - x,\ y_r,\ -12000).$$

Para que o receptor seja atingido pelo cone de Mach, esse vetor deve fazer exatamente o ângulo $\theta$ com o eixo do cone (o eixo $+x$, direção da velocidade). Assim,

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}{x_r - x} = \frac{\sqrt{y_r^2 + 12000^2}}{x_r - x}.$$

Com $\theta = 30°$, temos $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Portanto,

$$\frac{\sqrt{y_r^2 + 12000^2}}{x_r - x} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Substituindo $y_r = 3000$ m, obtemos

$$\frac{\sqrt{3000^2 + 12000^2}}{x_r - x} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

O numerador vale

$$\sqrt{3000^2 + 12000^2} = \sqrt{9 \times 10^6 + 144 \times 10^6} = \sqrt{153 \times 10^6} = 1000\sqrt{153}.$$

Logo,

$$\frac{1000\sqrt{153}}{x_r - x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad x_r - x = 1000\sqrt{153} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = 1000\sqrt{51}.$$

Assim, a posição do avião no instante de emissão é

$$x = x_r - 1000\sqrt{51} = 5000 - 1000\sqrt{51} \approx -2141 \text{ m}.$$

A partir deste ponto, o restante da solução — cálculo do tempo de emissão $t_e$, do tempo de propagação $\Delta t$ e do tempo total $T$ — é idêntico ao apresentado na Solução 1.

## Q3 - Viagem de balão (10 pontos)

Passeios de balão são oferecidos como atrações turísticas em diversas cidades, como na região da Capadócia, na Turquia, ou, aqui no Brasil, na cidade de Boituva. No entanto, há riscos associados a esse tipo de aventura, pois o balão, feito de uma camada muito fina de material inflável, funciona a partir do aquecimento do ar por um queimador, alimentado por cilindros de gás e localizado no mesmo espaço ocupado pelas pessoas que participam do voo.

Muitos acidentes têm ocorrido, tanto no Brasil quanto em outras partes do mundo, seja por negligência, seja por mau funcionamento dos equipamentos. A prática de soltar balões, mesmo os "não tripulados", é crime no Brasil e pode causar diversos danos, como, por exemplo, acidentes aéreos.

## Parte A: Antes do voo - 4 pontos

Um balão de ar é enchido no solo com ar quente. Suponha que a cobertura, composta de uma fina camada de material inflável do balão, tem massa diferente de zero e espessura dada por $d \ll R$, mas não desprezível, em que $R$ é o seu raio. Veja a figura esquemática a seguir.

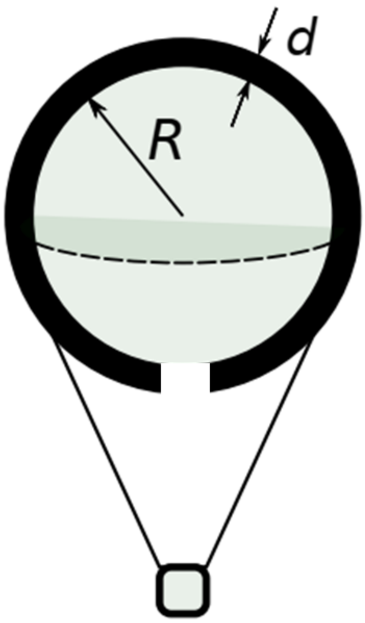



Figura 3: Diagrama esquemático de um balão de ar quente.

Denote as densidades do material da cobertura por $\rho_b$, do ar atmosférico por $\rho_{at}$, do ar quente dentro do balão por $\rho_{ar}$.

**A1.** Nestas circunstâncias, determine uma expressão para calcular o raio $R$ necessário para que o globo flutue, em equilíbrio, em função de $\rho_b$, $\rho_{at}$, $\rho_{ar}$ e sua espessura $d$. 1,5pt

**Gabarito:**

A1.

O peso da coberta do balão é

$$P_b = \rho_b g 4\pi R^2 d \tag{1}$$

O peso do ar dentro do balão é

$$P_{ar} = \rho_{ar}\frac{4}{3}\pi R^3 g \tag{2}$$

O empuxo

$$E = \rho_{at} g\frac{4}{3}\pi R^3 \tag{3}$$

Daí, equilibrando as forças

$$P_b + P_{ar} = E \Rightarrow 4\pi\rho_b R^2 d + \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_{ar} - \rho_{at}) = 0 \tag{4}$$

Simplificando

$$3\rho_b d + (\rho_{ar} - \rho_{at})R = 0 \tag{5}$$

$$R = \frac{3\rho_b d}{\rho_{at} - \rho_{ar}} \tag{6}$$

**Critérios A1 - 1,5 pontos**

- 0,75 pontos pelas expressões do peso do ar, peso do balão e do empuxo (0,25 por cada uma);
- 0,50 ponto pelo equilíbrio;
- 0,25 ponto pela expressão final de $R$.

Considere agora um balão como o do item anterior, com um volume inicial de 3700 $m^3$, e temperatura do ar de 100 $^oC$. O sistema, envolvendo a cesta, o queimador, os cilindros de gás e os audaciosos balonistas, tem uma massa combinada de 900 $kg$. A temperatura ambiente é de 20 $^oC$ e a pressão atmosférica é de aproximadamente $1{,}01\times10^5$ $Pa$. O invólucro deste balão pode ser considerado de massa e espessura desprezíveis. Use $\mu_{ar} = 0{,}029\ kg\cdot mol^{-1}$ (massa molar do ar a 100 $^oC$), e $c_{ar} = 1{,}0\ kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}$.

**A2.** Calcule a força de contenção $F$ necessária para segurar este balão no chão. 2,5pt

**Gabarito:**

A2. O ar quente pode ser considerado um gás ideal, assim

$$pV = \frac{m}{\mu}RT \tag{7}$$

Na figura acima, $E$ é o empuxo devido ao ar externo deslocado, $m_{ar}g$ é o peso do ar dentro do balão, $Mg$ é o peso do conjunto, $F_S$ a força para segurar o balão, e $p_{at}$ e $p_{ar}$ as pressões do ar dentro e fora.

Devido à abertura, as pressões do ar dentro e fora são iguais, isto é,

$$p_{ar} = p_{at} \tag{8}$$

Então,

$$p_{ar}V = \frac{m_{ar}}{\mu_{ar}}RT_{ar} \Rightarrow m_{ar} = \frac{p_{ar}V\mu_{ar}}{RT_{ar}} \tag{9}$$

Assim,

$$F = E - m_{ar}g - Mg = \rho V g - \frac{p_{ar}V\mu_{ar}}{RT_{ar}}g - Mg \tag{10}$$

$$\rho = \frac{p_{at}\mu_{ar}}{RT_{at}} = \frac{p_{ar}\mu_{ar}}{RT_{at}} \tag{11}$$

Substituindo,

$$F = \frac{\mu p_{ar} V}{R}\left(\frac{1}{T_{at}} - \frac{1}{T_{ar}}\right) g - Mg \approx 545 \text{ N} \tag{12}$$

**Critérios A2 - 2,5 pontos**

- 1,0 ponto pela expressão da massa do ar;
- 0,5 ponto pelo equilíbrio de forças
- 0,5 ponto pela expressão de $\rho$;
- 0,25 ponto pela expressão final.
- 0,25 ponto pelo valor final

## Parte B: O voo do balão - 6 pontos

A partir deste ponto, suponha que a força de contenção $F$ foi removida e o balão foi liberado para subir. Considere que a temperatura ambiente permanece constante com a altitude, e que a pressão atmosférica diminui 1,2% a cada 100 m de elevação.

**B1.** Determine a aceleração com que o balão sobe imediatamente após o lançamento. Calcule a altitude que o balão atingirá se a temperatura interna permanecer constante. 2,5pt

**Gabarito:**

B1.

$$a = \frac{F}{m_{ar} + M} \approx \frac{545 \text{ N}}{3{,}5 \times 10^3 \text{ kg} + 900 \text{ kg}} \approx 0{,}12 \text{ m/s}^2 \tag{13}$$

À medida que a altitude aumenta, a pressão do ar dentro e fora do balão diminui. De acordo com a expressão final do item A1, a força que faz o balão subir também diminui. A uma altura $h$, a força ascendente é zero. O balão, desacelerado pelo atrito do ar, eventualmente atinge essa altura.

A pressão do ar diminui em aproximadamente 1,2% para cada 100 m de diferença de altitude. A uma altura de $h_0 = 100$ m, é, portanto, apenas $p(100 \text{ m}) = 0{,}988 p_0$, e a uma altura de 200 m, é apenas $p(200 \text{ m}) = 0{,}988 p(100 \text{ m}) = 0{,}988^2 p_0$. Dessa maneira podemos formular uma relação exponencial para uma altura $h$ como $p(h) = 0{,}988^{h/h_0} p_0$. Com isso e com o auxílio da equação da força, o equilíbrio de forças necessário pode ser formulado como

$$M = \frac{\mu 0{,}988^{h/h_0} p_0 V}{R}\left(\frac{1}{T_{at}} - \frac{1}{T_{ar}}\right) \tag{14}$$

Daí,

$$h = \frac{h_0 \ln 0{,}988}{\ln\left(\frac{RM}{\mu p_0 V\left(\frac{1}{T_{at}} - \frac{1}{T_{ar}}\right)}\right)} \approx 480 \text{ m} \tag{15}$$

**Critérios B1 - 2,5 pontos**

- 0,5 ponto pela aceleração;
- 1,0 ponto pela expressão de $p(h)$;

- 0,5 ponto pelo equilíbrio de forças usando a expressão de $p(h)$.
- 0,5 ponto pela resposta final

Considere agora que, com o queimador desligado, o ar quente no interior do balão esfria lentamente, reduzindo a força de empuxo a uma taxa constante de 10 N/s.

**B2.** Estime o tempo máximo que o balão pode manter sua altitude acendendo regularmente o queimador, se ele estiver carregando um suprimento total de gás propano de 80 $kg$, que tem um poder calorífico de 50 $MJ/kg$. 3,5pt

**Gabarito:**

B2.

Sem reaquecimento, o balão perde $\Delta F = 10$ N de flutuabilidade por segundo devido ao resfriamento do ar dentro do balão. Isso corresponde a uma variação de temperatura, $\Delta T$, do ar dentro do balão. A perda de flutuabilidade é devido ao aumento da massa do ar quente dentro do balão, pelo seu esfriamento, que resulta da diferença nas forças de flutuabilidade:

$$\Delta F = \frac{\mu p_{ar} V}{R}\left(\frac{1}{T_{ar} - \Delta T} - \frac{1}{T_{ar}}\right) \tag{16}$$

De tudo isso, resulta uma diminuição, por segundo, da temperatura, dada por

$$\Delta T = T_{ar}\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{R\Delta F T_{ar}}{\mu p V g}}\right) \approx 3{,}1 \times 10^{-4} T_{ar} \approx 0{,}11 \text{ K} \tag{17}$$

Essa perda de temperatura deve ser compensada pelo aquecimento com o queimador. Supondo que todo o propano possa ser queimado e que toda a energia liberada pela combustão seja utilizada para aquecer o ar no balão, o tempo $t$ necessário para aquecer a massa de propano, $m_p$, pode ser estimado como:

$$t = \frac{H m_p}{m_{ar} c_{ar} \Delta T} \approx 9{,}9 \times 10^3 \text{ s} \approx 2{,}7 \text{ h} \tag{18}$$

**Critérios B2 - 3,5 pontos**

- 1,5 pontos pela expressão de $\Delta F$;
- 0,5 ponto pela temperatura;
- 1,0 pontos pela expressão do tempo
- 0,5 ponto pelo resultado final.

## Q4 - Michelson–Morley e LIGO (10 pontos)

Neste problema abordaremos o experimento de Michelson-Morley, um experimento conduzido no final do século XIX, com o intuito de medir a velocidade da luz em diferentes direções visando detectar a velocidade da luz com respeito ao éter.

Embora o experimento, na época, não tenha sido bem-sucedido, mais de cem anos depois, princípios semelhantes foram usados para detectar ondas gravitacionais no LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory). Aqui, investigaremos um modelo simplificado do experimento do LIGO, e como ele detecta ondas gravitacionais através de interferometria.

De forma simplificada, o experimento do LIGO consiste em uma fonte de luz cujos fótons são divididos igualmente por um "divisor" de luz denominado *beam splitter* ou *divisor de feixe* (o ponto A) — em dois percursos perpendiculares denominados *braços* — AB e AC, como na figura 4. Cada feixe dividido viaja até um espelho no fim de cada braço (os pontos B e C), é refletido de volta, e é então recombinado no divisor. Finalmente, um fotodetector mede a intensidade da luz combinada. Com base em diferenças na distância AB e AC pode se medir um padrão de interferência. Dito isso, o experimento do LIGO é calibrado muito precisamente, de forma que, originalmente, a distância entre AB e AC é aproximadamente igual.

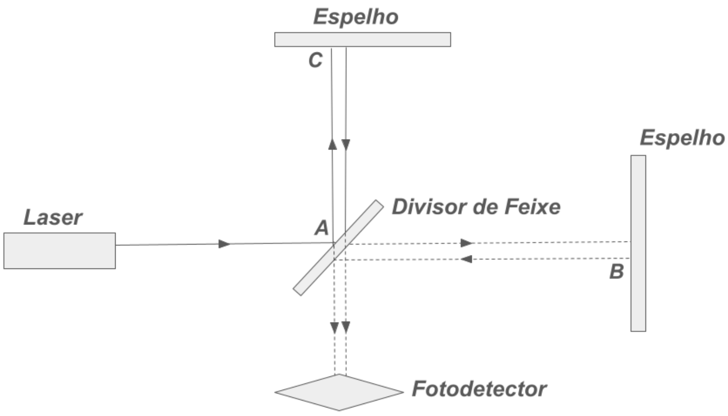



Figura 4: Experimento de Michelson Morley

Quando uma onda gravitacional passa sobre o detector, ela levemente distorce o comprimento dos braços AB e AC de forma diferente, devido a efeitos relativísticos. Essa pequena distorção causa um padrão de inteferência no fotodetector, e a partir disso pode se inferir a massa envolvida e a distância de origem da onda gravitacional.

O experimento visa medir uma quantia $h$ da onda gravitacional, denominada *strain*. Quando uma onda gravitacional de *strain* $h$ passa sobre o experimento, ela estende o braço AB por um fator proporcional a $(1+h)$, e encurta o braço AC por $(1-h)$. Nos itens seguintes, assuma que o comprimento dos braços AB e AC originais é igual a $L$, e o comprimento de onda do laser usado é $\lambda$.

**A1.** Assumindo que uma onda gravitacional com *strain* $h$ passe pelo interferômetro, calcule a diferença de caminho óptico de um fóton passando pelo caminho ABA e ACA. 2,0pt

**Gabarito:**

Sabemos que o fóton percorrendo o caminho AB viajará uma distancia $2 \cdot L \cdot (1+h)$, e o fóton percorrendo o caminho BC $2 \cdot L \cdot (1-h)$. Assim, a diferença de fase é:

$$\Delta L = 2 \cdot L \cdot (1+h) - 2 \cdot L \cdot (1-h) = 4hL \tag{19}$$

**Critério A1:**

- +2 pontos por obter o resultado $4hL$
- -1 pontos por fatores numéricos errados - obter $2hL$ por exemplo por não considerar que a distância $AB$ é percorrida duas vezes

Note-se que dupla penalidade aplica pros items seguintes, exceto se o resultado acima tiver erro de unidade.

**A2.** Dada a diferença de caminho óptico calculada acima, obtenha agora a diferença de fase $\Delta\phi$ dos fótons entre os dois braços. 2.0pt

**Gabarito:**

A diferença de fase é dada apenas por:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L = \frac{8\pi hL}{\lambda} \tag{20}$$

**Critério A2:**

- +2 pontos por escrever que $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L$
- -1 pontos por fatores numéricos errados ou erros de fórmula

**A3.** Digamos que, sem a onda gravitacional, a intensidade medida no fotodetector é $I_0$, e na presença da onda a intensidade medida é de $I'$. Calcule a variação relativa de intensidade $\dfrac{\Delta I}{I_0} = \dfrac{I' - I_0}{I_0}$. Simplifique seu resultado para $h$ muito pequeno. 2.0pt

**Gabarito:**

Lembrando (ou derivando) que quando temos duas fontes com diferença de fase $\Delta\phi$ entre elas, a nova intensidade é dada por:

$$I' = I_0 \cos^2 \frac{\Delta\phi}{2} \tag{21}$$

Assim:

$$\Delta I/I_0 = \left(\cos^2 \frac{\Delta\phi}{2} - 1\right) \tag{22}$$

Como $h$ é pequeno, $\Delta\phi$ também vai ser, logo podemos usar que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ para $x \ll 1$. Assim:

$$\cos^2 x = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2 = 1 - x^2 \text{ para } x \ll 0 \tag{23}$$

Assim:

$$\Delta I/I_0 = \left(\cos^2 \frac{\Delta\phi}{2} - 1\right) = -\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)^2 \tag{24}$$

**Critério A3:**

- +1 pontos por deduzir/lembrar da expressão de $I(\Delta\phi)$
- +1 pontos por expandir no limite de $h$ pequeno

- -0.5 pontos por erros numéricos ou erros de fórmula

**A4.** Dado que, para a primeira onda gravitacional detectada em 2015, o *strain* era $h = 1{,}0 \times 10^{-21}$, com $L = 4{,}0\,\mathrm{km}$ e $\lambda = 1034\,\mathrm{nm}$, calcule numericamente o valor de $\Delta I/I_0$.
Comente sobre a magnitude desse valor e se este experimento, da forma como apresentado, é capaz de detectar ondas gravitacionais. 2.0pt

**Gabarito:**

Dado que $\Delta\phi = \dfrac{8\pi h L}{\lambda} = \dfrac{8\pi \cdot (10^{-21}) \cdot (4 \cdot 10^3 m)}{(1034 \cdot 10^{-9} m)} = 9{,}7 \cdot 10^{-11} rad$, assim:

$$\Delta I/I_0 = -2.4 \cdot 10^{-21} \tag{25}$$

Naturalmente, dada a ordem de grandeza minúscula deste valor, esse experimento apenas não é suficiente para medir ondas gravitacionais.

**Critério A4:**

- +1 pontos pelo valor correto de $\Delta I/I_0$
- +1 pontos por argumentar que esse valor é muito pequeno para ondas gravitacionais serem detectadas

**A5.** Sugira *sucintamente* como aumentar a chance de detecção de ondas gravitacionais no LIGO, **sem aumentar o comprimento físico dos braços**. 2.0pt

**Gabarito:**

Temos duas sugestões possíveis: - aumentar a intensidade de laser, tal que variações de intensidade relativas (embora minúsculas), possam ser medidas. Essa ideia não é uma solução completa, porém ganha pontos parciais. - a sugestão completa, é perceber que o fator limitante do experimento é que a luz só viaja caminho $L = 4$km antes de recombinar, e que devido a $h$ ser pequeno $Lh$ também é pequeno. Logo precisamos descobrir como aumentar $L$.

Para isso, podemos adicionar espelhos entre cada braço, tal que fótons "pinguem" muitas vezes entre AB (ou AC antes de serem recombinados). Isso faz com que a distância $L$ aumente proporcionalmente ao número de "reflexões" entre AB/AC. Realisticamente, isso é feito via uma cavidade de Fabry-Perot, e a luz chega a "quicar" mais de 300 vezes entre cada braço, fazendo com que a luz passe a viajar de 4km até mais de 1200km !

**Critério A5:**

Dada a natureza qualitativa deste problema, seja generoso com os pontos, seguindo as duas possíveis vertentes abaixo, com base no que o aluno comentar, para um máximo de 2.0 pontos nesse item

- +1 pontos por falar sobre aumentar a intensidade do laser usado para poder medir variações de intensidade mais facilmente

Ou:

- +1 pontos por argumentar que o valor de $L$ é o principal limitante em medir ondas gravitacionais
- +1 pontos por propor aumentar o valor de $L$ "efetivamente" através de reflexões.

## Q5 - Vasos comunicantes no trem acelerado (10 pontos)

Um professor leva seus alunos para um experimento dentro de um trem. Nele, o seguinte aparato com vasos comunicantes é fixado ao piso do vagão, inicialmente em repouso. O eixo da parte inferior do tubo está disposto paralelamente aos trilhos do trem.

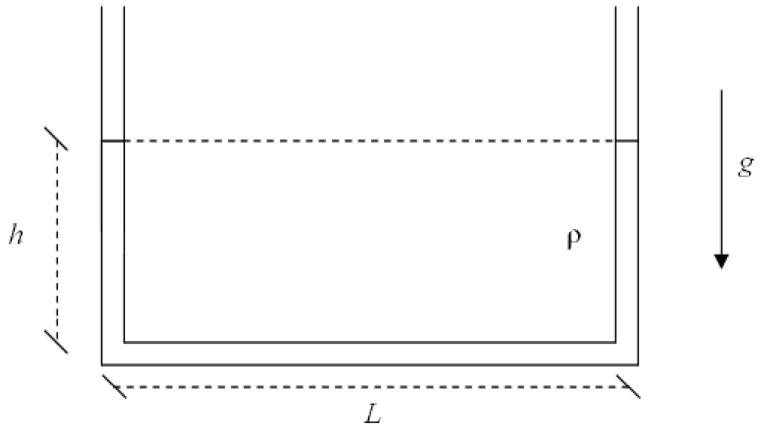



Figura 5: Aparato com vasos comunicantes disposto dentro do trem.

A distância entre as duas partes verticais do tubo é $L$ e cada um desses lados (daqui em diante referidos como braços) está preenchido até a altura $h$ com um líquido de densidade $\rho$. Considere a aceleração gravitacional local igual a $g$. Para esta questão, despreze as dimensões da secção transversal do tubo, constante em toda sua extensão, em relação à altura de cada coluna de líquido e à distância entre os seus braços.

## Parte A: Derramamento de outro líquido - 2 pontos

Antes de iniciar o experimento, o professor pede para um de seus alunos despejar o conteúdo de um tubo de ensaio preenchido até uma altura $h_1$ com um líquido de densidade $\rho_1$, com secção idêntica à do aparato de vasos comunicantes, no seu braço esquerdo. Considere que este líquido despejado é menos denso que o líquido inicialmente presente no aparato e que ambos não se misturam.

**A1.** Determine a altura da superfície de líquido (contato com o ar) em cada braço após o retorno do sistema ao equilíbrio hidrostático. 2,0pt

**Gabarito:**

A1. Sendo as secções do tubo de ensaio e do tubo do aparato principal iguais, a altura da coluna de líquido após despejado será igual a $h_1$. Assim, pela conservação do volume total, a soma das alturas dos lados esquerdo e direito deve ser $h_e + h_d = 2h + h_1$. Utilizando a equação dos vasos comunicantes (considerando a linha de base na parte horizontal do tubo):

$$\rho_1 g h_1 + \rho g(h_e - h_1) = \rho g h_d$$

$$\rho_1 h_1 + \rho(h_e - h_1) = \rho(2h + h_1 - h_e)$$

$$2h_e\rho = \rho(2h + 2h_1) - \rho_1 h_1$$

$$h_e = h + h_1 - \frac{h_1\rho_1}{2\rho}$$

$$h_d = h + \frac{h_1\rho_1}{2\rho}$$

**Critérios A1 - 2,0 pontos**

- 1,0 escrever corretamente a equação dos vasos comunicantes em alguma forma equivalente

- 0,5 escrever que a soma das alturas finais é $2h + h_1$

- 0,5 resolver o sistema de equações corretamente

## Parte B: Trem acelerado - 8 pontos

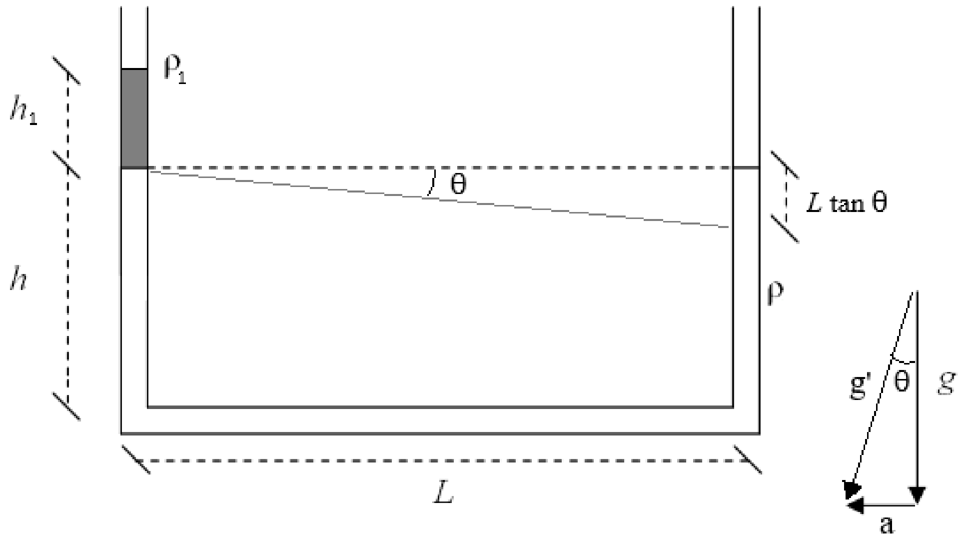
Dada a situação do item anterior, o trem inicia então um movimento com aceleração constante. Após o retorno ao equilíbrio hidrostático, um dos alunos faz a seguinte observação: "Professor, se não estivéssemos em um referencial acelerado, eu diria que o líquido despejado tem densidade nula". Despreze qualquer possível vasamento de líquido do aparato.

**B1.** Com base no que este aluno observou, determine a intensidade e o sentido da aceleração do trem. 4,0pt

**Gabarito:**

B1. A observação do aluno indica que as alturas das colunas de líquido com densidade $\rho$ estão niveladas. Só despejando um líquido com densidade zero, num referencial inercial como o trem parado, seria possível obter esta situação.

Mas, para a equação dos vasos comunicantes, as medidas das alturas das colunas de líquido devem ser feitas com a projeção na direção da gravidade aparente dentro do trem acelerado. Também é preciso usar a perpendicular a esta direção para identificar pontos no mesmo líquido com pressão igual e assim usar a equação dos vasos comunicantes.




Temos que $\tan\theta = \frac{a}{g}$, onde $\theta$ é o ângulo de inclinação da gravidade aparente $g'$, dentro do trem, com a vertical. A secção do tubo tem dimensões desprezíveis, então não precisamos nos preocupar com a inclinação do líquido dentro dele.

$$\rho_1 h_1 \cos\theta = \rho L \tan\theta \cos\theta$$
$$\rho_1 h_1 = \rho L \frac{a}{g}$$

$$a = g\frac{\rho_1 h_1}{\rho L}$$

Como a aceleração do trem em relação à Terra tem sentido oposto à aceleração horizontal aparente dentro dele, seu sentido é para a direita.

**Critérios B1 - 4,0 pontos**

- 1,0 notar que o referencial acelerado tem gravidade aparente inclinada em relação à vertical

- 1,0 desenhar figura com a direção inclinada entre pontos do mesmo líquido com pressão igual

- 1,0 escrever equação dos vasos comunicantes
Observação: descontar 0,5pt se as alturas na vertical não forem projetadas na direção da gravidade aparente, apesar de não fazer diferença para a continuidade da resolução

- 0,5 resolver corretamente para a intensidade

- 0,5 notar corretamente o sentido

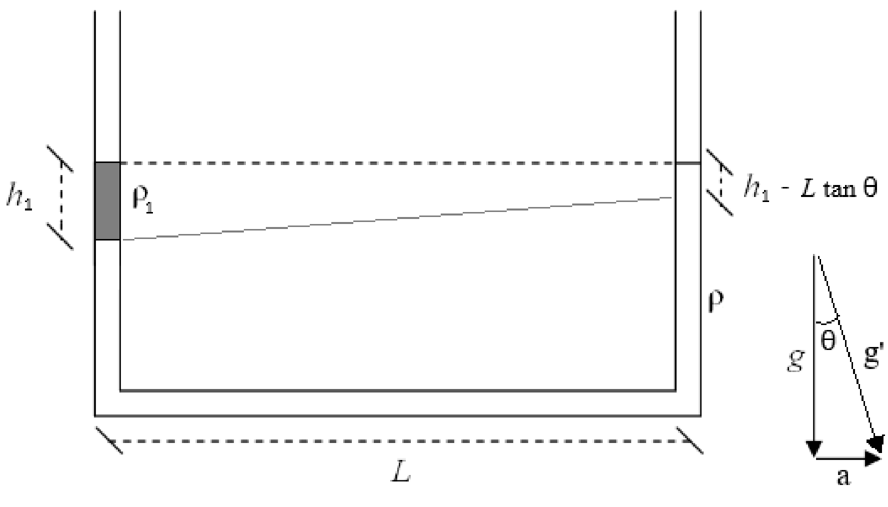
Agora, o trem muda sua aceleração e uma nova situação de equilíbrio hidrostático é estabelecida. Novamente, um dos alunos diz: "Professor, se não estivéssemos em um referencial acelerado, eu diria que os líquidos dentro desse aparato possuem a mesma densidade".

| | | |
|---|---|---|
| **B2.** | Com base nessa nova observação, determine a intensidade e o sentido da aceleração neste último caso. | 4,0pt |

**Gabarito:**

B2. Agora, a observação do aluno indica que as alturas das colunas de líquido, considerando à esquerda a coluna total com os 2 líquidos, estão niveladas. Esse é a única forma de as duas colunas terem a mesma altura se consideradas em um referencial inercial.

Fazendo as projeções de alturas:




$$\rho_1 h_1 \cos\theta = \rho(h_1 - L\tan\theta)\cos\theta$$

$$\rho_1 h_1 = \rho\left(h_1 - L\frac{a}{g}\right)$$

$$a = g\frac{h_1}{L}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho}\right)$$

Novamente, a aceleração do trem em relação à Terra tem sentido oposto à aceleração horizontal aparente dentro dele. Logo, seu sentido é para a esquerda.

**Critérios B2 - 4,0 pontos**

- 1,0 notar que o referencial acelerado tem gravidade aparente inclinada em relação à vertical

- 1,0 desenhar figura com a direção inclinada entre pontos do mesmo líquido com pressão igual

- 1,0 escrever equação dos vasos comunicantes
Observação: descontar 0,5pt se as alturas na vertical não forem projetadas na direção da gravidade aparente, apesar de não fazer diferença para a continuidade da resolução

- 0,5 resolver corretamente para a intensidade

- 0,5 notar corretamente o sentido