



OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE FÍSICA

Prova Seletiva 2 - SOIF / 2026

17 de dezembro de 2025

INSTRUÇÕES

1. A prova é composta por 5 questões. Sem contar essa folha de rosto, ela contém 8 páginas.
2. A duração da prova é de 5 horas ininterruptas. **O tempo de prova começa no instante de acesso ao caderno de questões.**
3. **Todas as respostas devem ser justificadas**, ou seja, a resolução da questão compreendida pelas principais etapas que levam às respostas deve ser apresentada.
4. **As resoluções devem escritas de próprio punho** em folhas inicialmente em branco (não use editores de texto). É permitido apenas o uso de caneta, de cor **azul ou preta**, lápis preto de traço forte, régua e **calculadora não programável**.
5. As folhas com a resolução de cada questão devem ser escaneadas no formato PDF. Um documento PDF (documento resposta) para cada questão.
6. Cada documento resposta deve ser enviado (submetido) através da correspondente interface de respostas em <https://app.graxaim.org/soif/2026>.
7. Quando um documento resposta é enviado a questão é considerada respondida. Não é possível enviar um documento para substituir outro já enviado.
8. Você pode responder as questões (enviar os documentos) em qualquer ordem. **Atenção para não enviar o documento resposta de uma questão no lugar de outra.**
9. Durante a prova, é permitido o uso de celular ou computador **apenas** para acessar o site <https://app.graxaim.org/soif/2026>, ou para trocas de mensagens com os coordenadores da SOIF através do endereço equipeobf@graxaim.org. **Todos os demais usos (aplicativos gráficos e numéricos, consultas, busca na internet, etc) são proibidos.**
10. Questões enviadas após do 5 horas do início da prova (acesso ao caderno de questões) não serão avaliadas, apesar do sistema aceitar a submissão normalmente.

Q1 - Pêndulo de barras compensadas (10 pontos)

Considere um pêndulo físico composto por três barras delgadas e homogêneas, conectadas por duas pequenas plataformas rígidas de espessura desprezível, conforme o esquema conceitual abaixo.

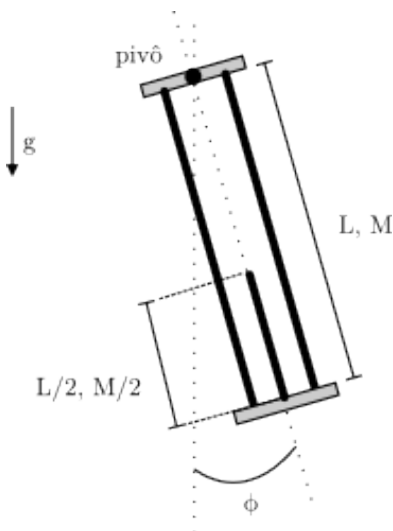


Figura 1: Diagrama esquemático do pêndulo de barras compensadas.

As duas barras principais têm massa $M_1 = M$ e comprimento $L_1 = L$, sendo ligadas paralelamente pelas plataformas em suas extremidades. O sistema pode oscilar em torno de um pivô situado no centro da plataforma superior, de modo que o conjunto se comporte como um corpo rígido oscilando em torno de um eixo horizontal e perpendicular ao plano das barras.

Na extremidade inferior, presa à plataforma oposta, encontra-se uma barra auxiliar de massa $M_2 = M/2$ e comprimento $L_2 = L/2$, orientada em direção ao pivô, isto é, apontando para cima. Todas as barras são delgadas e homogêneas. As plataformas, assim como conexões entre barras, têm massa desprezível. O objetivo do arranjo é reduzir a variação do período de oscilação com respeito à variação da temperatura θ .

Considere que o movimento do sistema possa ser tratado como pequenas oscilações no plano vertical. A distância entre as duas barras principais é muito pequena quando comparada aos comprimentos L e $L/2$. A aceleração da gravidade é g , tomada constante.

A.	Determine a distância h do centro de massa com respeito ao pivô da oscilação.	1,0pt
B.	Determine o período T de pequenas oscilações do pêndulo descrito, em função de M , L e g .	3,0pt

Admita agora que as barras principais e a barra auxiliar sofrem dilatação térmica linear, com coeficientes de dilatação linear respectivamente dados por α_1 e α_2 .

C.	Determine o valor numérico da razão α_1/α_2 que garanta que o período de oscilação T permaneça aproximadamente invariante frente a pequenas variações de temperatura. Considere apenas termos de primeira ordem em $\Delta\theta$.	6,0pt
-----------	---	-------

Q2 - Capacitor “defeituoso” (10 pontos)

De uma placa de um capacitor plano, descarregado, que se conecta, em paralelo, a uma bobina ideal de indutância L , se desprende uma lâmina fina, de carga q de dimensões iguais às placas do capacitor. A lâmina se move com velocidade constante $V \ll c$, na direção paralela às placas, ver figura abaixo.

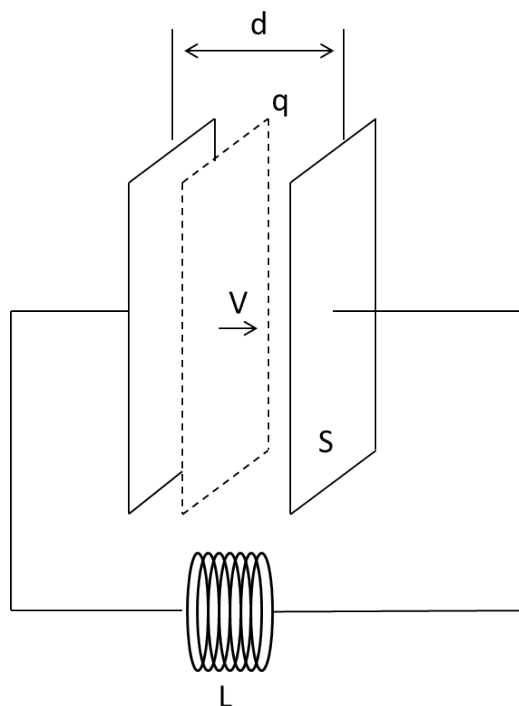


Figura 2: Diagrama esquemático do capacitor “defeituoso”.

A distância entre as placas é d e a área de cada uma delas, S . Considere $\sqrt{S} \gg d$. A permissividade elétrica do meio pelo qual se move a lâmina é ϵ_0 . Assuma que a carga q da lâmina permanece distribuída uniformemente na sua área ao longo de todo o processo.

- | | | |
|-----------|---|-------|
| A. | Encontre uma expressão para a diferença de potencial entre as placas do capacitor em função do tempo. | 4,5pt |
| B. | Determine a dependência da corrente na bobina com o tempo durante o movimento da lâmina entre as placas do capacitor. | 4,5pt |
| C. | Faça um gráfico qualitativo da corrente em função do tempo para o sistema em questão. | 1,0pt |

Q3 - Analogia eletro-magneto-gravitacional (10 pontos)

Parte A. Casca esférica carregada girando (3,0 pontos)

Considere uma casca esférica, de raio R , com densidade superficial de carga elétrica uniforme e igual a σ , girando com uma velocidade angular ω . Sabe-se que $\frac{\omega R}{c} \ll 1$.

- A1.** Encontre uma expressão para o vetor indução magnética \vec{B} no centro da casca esférica. Expresse sua resposta em função de σ , R , ω e μ_0 . 3,0pt

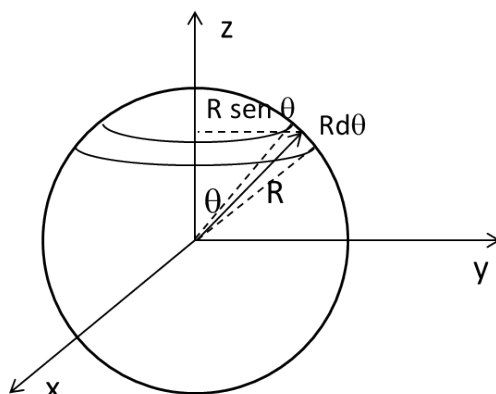


Figura 3: Casca carregada girando.

Parte B. Corpo carregado deformável no centro de uma casca esférica carregada, girando (7,0 pontos)

Suponha que no centro da esfera tenha um pequeno corpo deformável de dimensões $\delta \ll R$, com densidades volumétricas homogêneas de massa, ρ , e de carga elétrica, λ . Este objeto também gira, em torno do mesmo eixo z , mas com velocidade angular Ω . O sistema é ilustrado na figura 4.

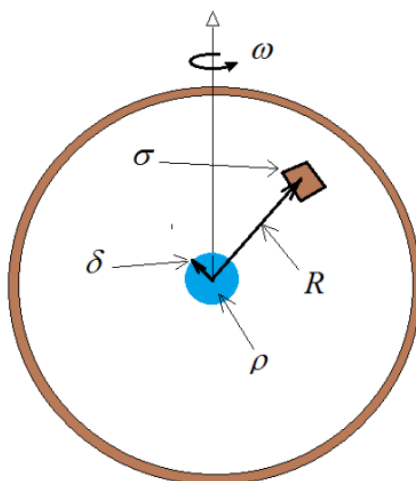


Figura 4: Casca carregada girando com corpo deformável na origem.

Sabe-se que existe uma velocidade angular $\vec{\Omega} \neq 0$ do corpo deformável no interior da esfera que rota, para a qual o dito corpo mantém a forma que tem em ausência de interações que possam deformá-lo.

B1. Calcule a velocidade angular $\vec{\Omega}$ em termos de grandezas fornecidas. Assuma que os campos elétrico e magnético são homogêneos em todo o volume do corpo deformável. 2,5pt

B2. Encontre a carga líquida superficial que iguala ambas as velocidades angulares, $\vec{\omega}$ e $\vec{\Omega}$. 1,5pt

B3. Que sinais devem ter as cargas, superficial e do corpo deformável, para que este último gire no mesmo sentido que a casca? 0,5pt

A analogia entre a lei de Coulomb e a lei de gravitação universal, no limite de campos fracos e pequenas velocidades, permite descrever os efeitos gravitacionais através de analogias eletromagnéticas. De acordo com isto, o sistema anterior é análogo a uma esfera coberta com uma densidade superficial de massa, σ_g , que gira, e um corpo deformável no interior, análogo ao anterior, particularmente, na sua densidade de massa, ρ , ajustando corretamente os parâmetros. Considere que este ajuste se obtém substituindo as densidades de carga superficial da esfera e volumétrica do corpo deformável segundo as regras: $\sigma \rightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0 G} \sigma_g$ e $\lambda \rightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0 G} \rho$.

B4. Utilize o resultado do item B2. e as regras de substituição dadas para determinar a razão entre a massa líquida superficial que igualaria as duas velocidades angulares no caso gravitacional, e a massa de um buraco negro $M_{BN} = \frac{c^2 R}{2G}$, com raio R igual ao da casca. 2,5pt

Q4 - Contando colisões relativísticas (10 pontos)

Considere duas partículas pontuais de massas (de repouso) M e m , se movendo ao longo do eixo x (fig. 5). Inicialmente, a massa M se encontra com momento p_0 , andando em direção a massa m (em repouso). Após a primeira colisão, a massa m é lançada em direção a parede, onde ela irá colidir e refletir, até colidir com M novamente. Esse processo se repete, até a massa M eventualmente mudar de direção.

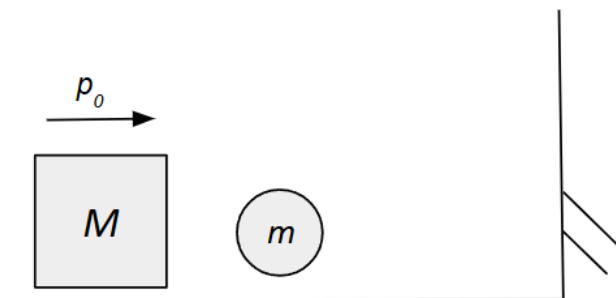


Figura 5: O estado inicial, antes da primeira colisão entre as massas M, m .

Este cenário é um problema famoso na mecânica clássica. Discutiremos a seguir a sua versão *relativística*. O objetivo será estimar o número N de colisões entre as massas até a direção de movimento de M se inverter.

Parte A: Caso clássico

Digamos que, em determinado instante, M encontra com momento p no eixo x , e está prestes a colidir com a outra massa m se movendo com momento $-q$. Depois da colisão, ambas M e m se movem na mesma direção com momentos p' e q' respectivamente (fig. 6).

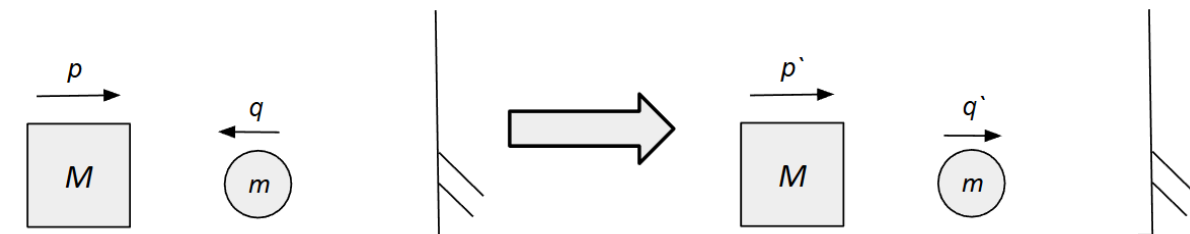


Figura 6: O instante da colisão. Momentos $(p, -q)$ (antes) se transformam em (p', q') (depois).

Assuma que todas as colisões, entre as massas e com a parede, são perfeitamente elásticas, e que as massas deslizam sobre a superfície sem atrito.

- A1.** Escreva a equação de conservação de energia (relativística) durante a colisão da fig. 6, relacionando p, q, p', q', M, m , e a velocidade da luz c . 0,5pt

No resto da parte **A**, estudaremos o limite clássico, onde $p, q \ll M \cdot c, m \cdot c$.

- A2.** Neste limite clássico, esboce o espaço de fase do sistema. Isto é, desenhe um gráfico 2D, com eixos (p, q) , representando os valores de momento admissíveis dado apenas a equação de conservação de energia. Indique pontos notáveis no seu esboço, em função de M, m, p_0 . 0,5pt
- Dica:** O formato da curva é uma cônica.

- A3.** Escreva a equação de conservação de momento durante a colisão da fig. 6, relacionando p, q, p', q' . Faria alguma diferença se as partículas fossem relativísticas? 0,5pt

No gráfico do espaço de fase do item **b**, o sistema inicialmente se encontra na coordenada $(p_0, 0)$. Agora, estudaremos como o sistema evolui após as colisões, neste gráfico.

- A4.** No contexto da fig. 6 (e novamente, no caso clássico), digamos que o sistema se encontre na coordenada $(p, -q)$, onde $p, q > 0$. Faça outro esboço do espaço de fase, e represente os pontos $(p, -q)$ (antes da colisão) e (p', q') (depois) no seu esboço. Represente também a configuração do sistema após m refletir na parede. 0,5pt

- A5.** Mostre que, no limite onde $p_0 \ll m \cdot c \ll M \cdot c$, o número de colisões até M mudar de direção é 1,0pt

$$N_{\text{clássico}} \approx \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{M}{m}} \quad (2)$$

Dica: Normalize os eixos do espaço de fase, para o diagrama virar um círculo: $(p, q) \rightarrow (p/\sqrt{M}, q/\sqrt{m})$. Neste círculo, qual o ângulo entre (p, q) e (p', q') ?

Parte B: Caso ultra-relativístico

No regime *ultra-relativístico*, as partículas se movem com momentos muito maiores que seus respectivos momentos de repouso, isto é, $p \gg m \cdot c$. Nessa situação, a energia total de cada partícula é dominada pela contribuição cinética, com o espaço de fases assumindo uma geometria característica desse limite extremo.

Na parte **B**, considere o limite onde o momento inicial p_0 da massa M satisfaz:

$$p_0 \gg M \cdot c, \quad p_0 \gg m \cdot c, \quad p_0 \gg \frac{M^2}{m} \cdot c, \quad M \gg m \quad (9)$$

- B1.** Esboce o espaço de fase (p, q) do sistema nesse limite ultra-relativístico. Qual é o formato da figura encontrada? 1,5pt

- B2.** Neste limite, quantas colisões entre M, m são necessárias até M mudar de direção? 1,5pt

Parte C: Limite semi-relativístico

A suposição que $m \ll M$ abre as portas para um terceiro caso muito curioso, onde uma das partículas (a massona) é clássica, enquanto a outra (a massinha) é ultra-relativística. Nesta parte **C**, estudaremos este limite *semi-relativístico*, onde o momento inicial p_0 da massa M satisfaz:

$$M \cdot c^2 \gg \frac{p_0^2}{2M} \gg m \cdot c^2 \quad (24)$$

O que faz esse limite tão curioso, é que o sistema passa por três estágios diferentes, onde

1. primeiramente, m começa em repouso, e inicialmente se comporta classicamente, porque $q \ll m \cdot c$.
2. Eventualmente, após várias colisões, $q \sim m \cdot c$, e ela começa a se comportar de modo relativístico.
3. Finalmente, $q \gg m \cdot c$, e a massinha vira ultra-relativística.

Hoje, desprezaremos os primeiros dois estágios, e estudaremos apenas o terceiro para estimar o número de colisões até M mudar de direção.

- C1.** Usando a equação de conservação de energia neste limite semi-relativístico, já no terceiro estágio (onde $q \gg m \cdot c$), mostre que o momento q da massinha satisfaz: 1,0pt

$$q \approx m \cdot c + f(M, p, p_0, c) \quad (25)$$

e encontre a função $f(M, p, p_0, c)$.

- C2.** No contexto da fig. 6, obtenha uma expressão aproximada para $\Delta p = p' - p$. Novamente, considere o limite semi-relativístico. 2,0pt
Dê sua resposta em função apenas de q .

Dica: Pode ser útil a seguinte aproximação para $|nx| \ll 1$:

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx \quad (26)$$

O caso semi-relativístico é bem mais complexo que os anteriores, logo consideramos um método diferente para contar as colisões. Considere um limite contínuo das colisões, onde o momento $p(n)$ da massa M após a n -ésima colisão (aproximadamente) satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d}{dn} p(n) \approx \Delta p(n) \quad (\text{calculado no item acima}) \quad (27)$$

Por simplicidade, assuma que seu resultado na parte **C.1** é válida sempre na região de momento da massa M p de p_0 até 0. Dado isso, usando a sua resposta dos dois itens acima, resolva:

- C3.** Estime o número de colisões N até M mudar de direção, neste limite semi-relativístico, usando apenas a dinâmica do terceiro estágio. 1,0pt
Dê sua resposta em função de M, m, c e p_0 .

Dica: Utilize a seguinte integral

$$\int_0^a \frac{dx}{b^2 - x^2} = \frac{1}{2b} \ln \left(\frac{b+a}{b-a} \right), \quad \text{onde } b > a > 0. \quad (28)$$

Q5 - Partícula confinada em um poço com barreiras finas (10 pontos)

Considere uma partícula quântica de massa m , em uma região unidimensional. A partícula está inicialmente confinada na região central $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$, que chamaremos de “poço”. Nas bordas do poço existem duas barreiras de potencial idênticas, cada uma de espessura $\varepsilon \ll a$ e altura V_0 , centradas nas posições $x = -\frac{a}{2}$ e $x = +\frac{a}{2}$. Fora dessas duas barreiras, o potencial é praticamente nulo e a partícula, se escapar, pode se mover livremente. Um diagrama simplificado do potencial efetivo é mostrado abaixo.

$$V(x) \approx \begin{cases} 0, & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \quad (\text{interior do poço}) \\ V_0, & \text{regiões finas de largura } \varepsilon \text{ em } x = \pm \frac{a}{2} \\ 0, & \text{fora das barreiras} \end{cases}$$

Assuma que sabemos que existe inicialmente uma partícula dentro do poço.

- | | | |
|-----------|---|-------|
| A. | Usando o princípio da incerteza de Heisenberg, estime a altura mínima da barreira de potencial V_0 necessária para confinar a partícula dentro da região $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$. Discuta como essa estimativa depende dos parâmetros a , m e \hbar . | 4,0pt |
|-----------|---|-------|

Assuma agora que a energia média da partícula é E , com $E \ll V_0$, tal que a probabilidade T seja pequena. A partícula está inicialmente confinada no poço, mas, por efeito de tunelamento quântico, existe uma pequena probabilidade da partícula atravessar uma das barreiras finas e escapar para fora. Admita que, ao incidir uma única vez sobre uma parede, essa pequena probabilidade pode ser aproximada por

$$T \sim \exp\left[-\alpha\sqrt{V_0}\varepsilon\right],$$

em que α é uma constante física de dimensões adequadas.

- | | | |
|-----------|---|-------|
| B. | Utilize argumentos físicos para estimar como α deve depender das constantes do problema. | 2,0pt |
|-----------|---|-------|

Eventuais fatores numéricos no parâmetro α podem ser desconsiderados para os objetivos de estimativa dessa questão. A partícula se move aproximadamente livre dentro do poço, batendo sucessivamente contra as barreiras e tentando escapar a cada colisão com probabilidade T muito pequena em cada colisão.

- | | | |
|-----------|--|-------|
| C. | Estime o tempo de meia-vida de confinamento da partícula dentro do poço, isto é, o tempo necessário para que a probabilidade de ainda encontrá-la no interior do poço caia para metade do valor inicial. Sua resposta deve ser dada em termos de a , ε , m , \hbar , E e V_0 . | 4,0pt |
|-----------|--|-------|