Q1 - Pêndulo de barras compensadas (10 pontos)

Considere um pêndulo físico composto por três barras delgadas e homogêneas, conectadas por duas pequenas plataformas rígidas de espessura desprezível, conforme o esquema conceitual abaixo.

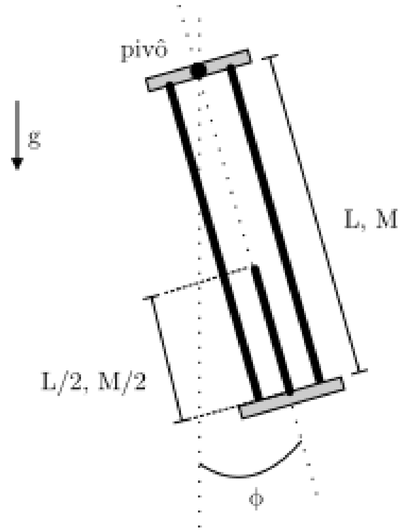


Figura 1: Diagrama esquemático do pêndulo de barras compensadas.

As duas barras principais têm massa $M_1 = M$ e comprimento $L_1 = L$, sendo ligadas paralelamente pelas plataformas em suas extremidades. O sistema pode oscilar em torno de um pivô situado no centro da plataforma superior, de modo que o conjunto se comporte como um corpo rígido oscilando em torno de um eixo horizontal e perpendicular ao plano das barras.

Na extremidade inferior, presa à plataforma oposta, encontra-se uma barra auxiliar de massa $M_2 = M/2$ e comprimento $L_2 = L/2$, orientada em direção ao pivô, isto é, apontando para cima. Todas as barras são delgadas e homogêneas. As plataformas, assim como conexões entre barras, têm massa desprezível. O objetivo do arranjo é reduzir a variação do período de oscilação com respeito à variação da temperatura θ.

Considere que o movimento do sistema possa ser tratado como pequenas oscilações no plano vertical. A distância entre as duas barras principais é muito pequena quando comparada aos comprimentos L e $L/2$. A aceleração da gravidade é g, tomada constante.

A.	Determine a distância h do centro de massa com respeito ao pivô da oscilação.	1,0pt

Gabarito:

A.

As duas barras principais (cada uma com massa M e comprimento L) estão presas pela plataforma superior no pivô e se estendem para baixo. Cada barra homogênea tem seu centro de massa a uma distância $L/2$ abaixo do pivô. Como há duas barras idênticas, a contribuição total de massa dessas barras é $2M$, e seu centro de massa efetivo está a $L/2$ do pivô.

A barra auxiliar tem massa $M/2$ e comprimento $L/2$, e está presa pela plataforma inferior voltada para cima, em direção ao pivô. Logo, seu extremo mais alto está na plataforma inferior, cuja posição está a uma distância L abaixo do pivô (pois coincide com as extremidades inferiores das barras principais). Assim, medindo a partir do pivô para baixo como sentido positivo, a barra auxiliar ocupa a faixa de posições entre $y = L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}$ e $y = L$. O centro de massa dessa barra está, portanto, a uma distância média entre essas extremidades, isto é,

$$y_{\text{aux}} = \frac{\frac{L}{2} + L}{2} = \frac{3L}{4}.$$

Logo:

$$\text{massa total} \quad M_{\text{tot}} = 2M + \frac{M}{2} = \frac{5M}{2}.$$

Escolhendo o pivô como origem vertical $y = 0$, com $y > 0$ apontando para baixo, temos:

$$y_{\text{cm}} = h = \frac{2M \cdot \left(\frac{L}{2}\right) + \frac{M}{2} \cdot \left(\frac{3L}{4}\right)}{M_{\text{tot}}} = \frac{2M \cdot \frac{L}{2} + \frac{M}{2} \cdot \frac{3L}{4}}{\frac{5M}{2}}.$$

Portanto, a distância entre o pivô e o centro de massa total é

$$h = \frac{11}{20}L.$$

Critério de correção (4,0 pt).

- 0,5 pt: Expressão correta de h.
- 0,5 pt: Resultado final correto.

B. Determine o período T de pequenas oscilações do pêndulo descrito, em função de M, L e g. 3,0pt

Gabarito:

B.

i) Determinar o momento de inércia total I em torno do pivô.

Para cada barra principal (massa M, comprimento L, pivô em uma das extremidades), o momento de inércia em torno do pivô é

$$I_{\text{barra princ}} = \frac{1}{3}ML^2.$$

Como existem duas barras idênticas:

$$I_{(\text{duas princ})} = 2 \cdot \frac{1}{3}ML^2 = \frac{2}{3}ML^2.$$

Agora a barra auxiliar. Ela é uma barra homogênea de massa $M/2$ e comprimento $L/2$ cujo eixo está deslocado. Para uma barra uniforme, podemos usar o teorema dos eixos paralelos: o momento de inércia em torno do centro de massa da barra é

$$I_{\text{cm,aux}} = \frac{1}{12}m\ell^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{M}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{M}{2} \cdot \frac{L^2}{4} = \frac{ML^2}{96}.$$

A distância entre o pivô e o centro de massa da barra auxiliar é $y_{\text{aux}} = 3L/4$. Assim, pelo teorema dos eixos paralelos:

$$I_{\text{aux}} = I_{\text{cm,aux}} + m\,y_{\text{aux}}^2 = \frac{ML^2}{96} + \left(\frac{M}{2}\right)\left(\frac{3L}{4}\right)^2 = \frac{ML^2}{96} + \frac{M}{2} \cdot \frac{9L^2}{16} = \frac{7ML^2}{24}.$$

Portanto, o momento de inércia total é

$$I = I_{(\text{duas princ})} + I_{\text{aux}} = \frac{2}{3}ML^2 + \frac{7}{24}ML^2 = ML^2\left(\frac{2}{3} + \frac{7}{24}\right) = ML^2\left(\frac{16}{24} + \frac{7}{24}\right) = ML^2 \cdot \frac{23}{24} = \frac{23}{24}ML^2.$$

ii) Calcular o período do pêndulo.

A expressão geral para um pêndulo físico é

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{M_{\text{tot}}\, g\, h}}.$$

Substituindo os valores encontrados anteriormente na fórmula:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{23}{33}\,\frac{L}{g}}.$$

Critério de correção (4,0 pt).

- 1,5 pt: determinação correta de I.
- 1,5 pt: substituição dos resultados anteriores em $T = 2\pi\sqrt{I/(M_{\text{tot}}gh)}$ e expressão final correta.

Admita agora que as barras principais e a barra auxiliar sofrem dilatação térmica linear, com coeficientes de dilatação linear respectivamente dados por α_1 e α_2.

C. Determine o valor numérico da razão α_1/α_2 que garanta que o período de oscilação T permaneça aproximadamente invariante frente a pequenas variações de temperatura. Considere apenas termos de primeira ordem em $\Delta\theta$. 6,0pt

Gabarito:

(C)

Agora considere a dilatação térmica. Para pequenas variações de temperatura ΔT:

$$L_1 = L \longrightarrow L_1' = L(1+\alpha_1\Delta T), \qquad L_2 = \frac{L}{2} \longrightarrow L_2' = \frac{L}{2}(1+\alpha_2\Delta T).$$

Isso altera:

- o momento de inércia total I;
- a distância h entre o pivô e o centro de massa total.

Portanto, o período do pêndulo pode ser, no caso geral, modificado por variações de temperatura. Para que o período seja termicamente estável a primeira ordem, exigimos que T não varie linearmente com θ. Ou seja,

$$\frac{dT}{d\theta} = 0.$$

Como

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{M_{\text{tot}}gh}},$$

com M_{tot} constante (as massas não mudam com a temperatura), basta impor que a fração I/h não varie linearmente com ΔT. Em outras palavras, exigimos

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{I}{h}\right) = 0.$$

Essa condição é satisfeita se tivermos, em primeira ordem, umas mesma variação percentual das quantidades I e h. Isto é:

$$\frac{\Delta I}{I.\Delta\theta} = \frac{\Delta h}{h.\Delta\theta}. \tag{1}$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir valores unitários de L e M para simplificar as expressões a seguir. É necessário agora, a partir das expressões de I e h em termos de L_1 e L_2, descobrir como essas quantidades variam com variações de temperatura em termos de α_1 e α_2. Veja:

- Cálculo de Δh:

  O centro de massa está em
  $$h = \frac{3L_1 - \frac{1}{2}L_2}{5}.$$
  Com $L_1 = 1 + \alpha_1\Delta\theta$ e $L_2 = \frac{1}{2}(1 + \alpha_2\Delta\theta)$, obtemos, a primeira ordem,
  $$\frac{\Delta h}{h\,\Delta\theta} = \frac{12\alpha_1 - \alpha_2}{11}.$$

- Cálculo de ΔI:

  O momento de inércia total é
  $$I = \frac{1}{6}\left(7L_1^2 - 3L_1L_2 + L_2^2\right).$$
  Substituindo os comprimentos dilatados e expandindo a primeira ordem,
  $$\frac{\Delta I}{I\,\Delta\theta} = \frac{2(25\alpha_1 - 2\alpha_2)}{23}.$$

Substituindo ambos os resultados na condição (1), segue

$$\frac{2(25\alpha_1 - 2\alpha_2)}{23} = \frac{12\alpha_1 - \alpha_2}{11},$$

e assim obtemos a razão desejada

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{21}{274}.$$

Critério de correção (6,0 pt).

- 1,0 pt: identificação correta das grandezas afetadas pela dilatação térmica e escrita das dilatações lineares $L_1 \to L_1(1 + \alpha_1\Delta\theta)$ e $L_2 \to L_2(1 + \alpha_2\Delta\theta)$.
- 1,0 pt: Reconhecimento da dependência térmica de I e h.
- 1,0 pt: expansão correta de I e h até primeira ordem em $\Delta\theta$.
- 2,0 pt: obtenção da relação $\Delta I/I = \Delta h/h$ a partir da invariância do período.
- 1,0 pt: valor correto da razão α_1/α_2.

Q2 - Capacitor “defeituoso”(10 pontos)

De uma placa de um capacitor plano, descarregado, que se conecta, em paralelo, a uma bobina ideal de indutância L, se desprende uma lâmina fina, de carga q de dimensões iguais às placas do capacitor. A lâmina se move com velocidade constante $V \ll c$, na direção paralela às placas, ver figura abaixo.

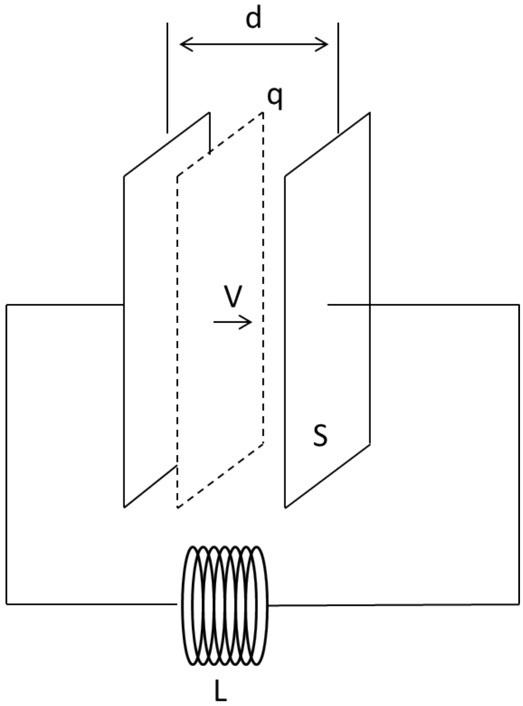


Figura 2: Diagrama esquemático do capacitor “defeituoso”.

A distância entre as placas é d e a área de cada uma delas, S. Considere $\sqrt{S} \gg d$. A permissividade elétrica do meio pelo qual se move a lâmina é ε_0. Assuma que a carga q da lâmina permanece distribuída uniformemente na sua área ao longo de todo o processo.

A.	Encontre uma expressão para a diferença de potencial entre as placas do capacitor em função do tempo.	4,5pt

Gabarito:

A. A placa, inicialmente está descarregada. Da figura **??**, temos que

$$E_I = E_1 - E_2$$
$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} = -\frac{Q(t)+q}{2\varepsilon_0 S}$$
$$E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}.$$

Então, para a região I,

$$|E_I(t)| = |E_1 - E_2| = |\frac{-Q(t)-q}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q}{2\varepsilon_0 S}| = |\frac{-Q(t)-2q}{2\varepsilon_0 S}| = \frac{Q(t)+2q}{2\varepsilon_0 S}.$$

Para a região II,

$$E_{II} = E_3 - E_2$$

$$E_3 = \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = \frac{Q(t)}{2\varepsilon_0 S}$$

Daí,

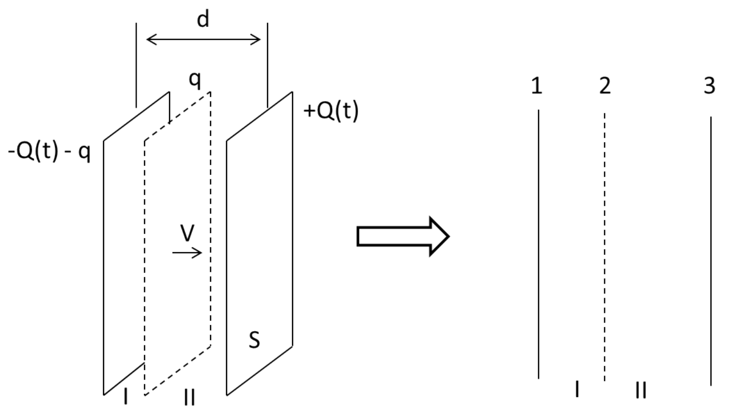
$$E_{II}(t) = \frac{Q(t)}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q(t) - q}{2\varepsilon_0 S}$$

A diferença de potencial entre as placas, por sua vez, é dada por

$$U(t) = E_I(t)d_I + E_{II}(t)d_{II}$$

$$U(t) = \frac{Q(t) + 2q}{2\varepsilon_0 S}.Vt + \frac{Q(t) - q}{2\varepsilon_0 S}.(d - Vt)$$

$$U(t) = \frac{Q(t)d}{2\varepsilon_0 S} + \frac{3}{2}\frac{qVt}{\epsilon_0 S} - \frac{qd}{2\varepsilon_0 S} = \frac{[Q(t) - q]d + 3qVt}{2\varepsilon_0 S}.$$



Critério de correção (4,5 pt).

- 2,0 pt: determinação correta de E_I.
- 1,5 pt: determinação correta de E_{II}.
- 1,0 pt: pela expressão correta de $U(t)$.

B. Determine a dependência da corrente na bobina com o tempo durante o movimento da lâmina entre as placas do capacitor. 4,5pt

Gabarito:

B. Da lei das malhas...

$$-L\frac{dI}{dt} - U(t) = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} - \left[\frac{[Q(t) - q]d + 3qVt}{2\varepsilon_0 S}\right] = 0$$

Daí...

$$\frac{dI}{dt} + \frac{[Q(t) - q]d + 3qVt}{2\varepsilon_0 SL} = 0$$

Derivando no tempo...

$$\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \frac{\frac{dQ(t)}{dt}d + 3qV}{2\varepsilon_0 S} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \left(\frac{d}{2\varepsilon_0 SL}\right)I(t) + \frac{3qV}{2\varepsilon_0 SL} = 0}$$

Solução: fazendo a seguinte troca de variáveis

$$i(t) = I(t) + \frac{3qV}{d} \Rightarrow \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{d}{2\varepsilon_0 SL} i(t) = 0$$

Portanto...

$$I(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t - \frac{3qV}{d}$$

onde

$$\omega = \sqrt{\frac{d}{2\varepsilon_0 SL}}$$

Em $t = 0$, $I(0) = 0$, então... $A = \frac{3qV}{d}$ então

$$I(t) = \frac{3qV}{d}\cos\sqrt{\frac{d}{2\epsilon_0 SL}}t + B\sin\sqrt{\frac{d}{2\epsilon_0 SL}}t$$

Em $t = 0$ não há voltagem na bobina, então

$$L\frac{dI(0)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dI(0)}{dt} = 0 = B\sqrt{\frac{d}{2\epsilon_0 SL}} = 0 \Rightarrow B = 0$$

Assim...

$$I(t) = \frac{3qV}{d}\left(\cos\sqrt{\frac{d}{2\epsilon_0 SL}}t - 1\right)$$

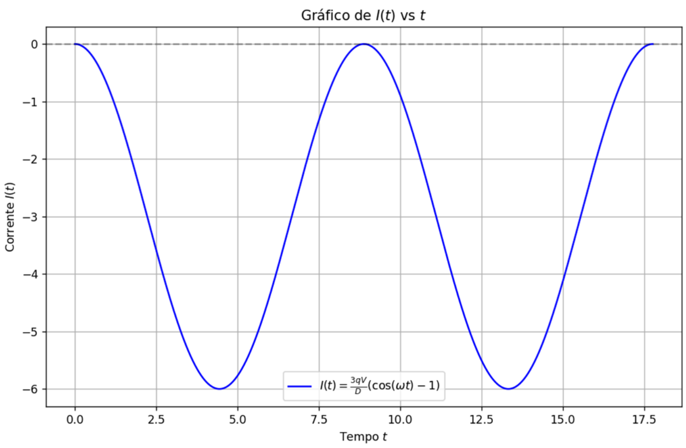
Critério de correção (4,5 pt).

- 2,5 pt: pela equação diferencial para a corrente.
- 2,0 pt: pela expressão final, incluindo a expressão de ω.

C. Faça um gráfico qualitativo da corrente em função do tempo para o sistema em questão. 1,0pt

Gabarito:

C.



Critério de correção (1,0 pt).

- 1,0 pt: desenho qualitativo correto do gráfico.

Q3 - Analogia eletro-magneto-gravitacional (10 pontos)

Parte A. Casca esférica carregada girando (3,0 pontos)

Considere uma casca esférica, de raio R, com densidade superficial de carga elétrica uniforme e igual a σ, girando com uma velocidade angular ω. Sabe-se que $\frac{\omega R}{c} \ll 1$.

A1. Encontre uma expressão para o vetor indução magnética $\vec{B}$ no centro da casca esférica. Expresse sua resposta em função de σ, R, ω e μ_0. 3,0pt

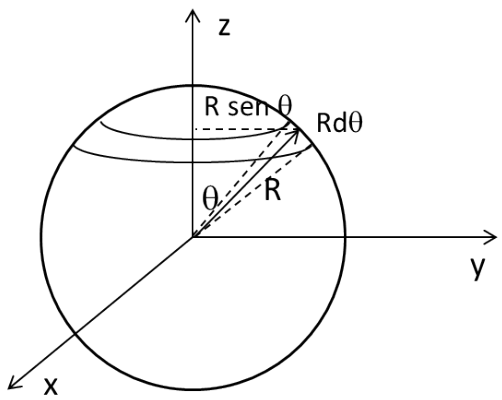


Figura 3: Casca carregada girando.

Gabarito:

A1. Uma casca esférica uniformemente carregada girando cria correntes na superfície. Dividindo a esfera em anéis de raio $a = R\sin\theta$ (ver figura 3):

$$dq = \sigma(2\pi a)Rd\theta = 2\pi\sigma aRd\theta$$
$$\delta i = \frac{dq}{T} = \frac{dq}{2\pi}\omega = \frac{2\pi\sigma aRd\theta\omega}{2\pi} = \sigma aR\omega d\theta$$
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$
$$d\vec{l} = (R\sin\theta)d\phi\hat{\phi} = dl\hat{\phi}$$

A corrente δi é a corrente correspondente a apenas um anel. As componentes radiais do campo se cancelam e as verticais se somam.

Assim
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi R^2}\cos\psi\hat{z} = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi R^2}\frac{a}{R}\hat{z} = \frac{\mu_0 Idla}{4\pi R^3}\hat{z}$$

Integrando para esse anel, em dl:
$$\delta\vec{B}_z = \frac{\mu_0 I2\pi a^2}{4\pi R^3}\hat{z} = \frac{\mu_0 Ia^2}{2R^3}\hat{z}$$

Aqui chamamos $\delta\vec{B}_z$ ao campo do anel, que é um diferencial do campo da casca inteira. Então, substituindo $a = R\sin\theta$ e usando a corrente δi, para a casca temos, integrando em θ, de $0 - \pi$:

$$\boxed{B_z = \int \frac{\mu_0}{2}\frac{\sigma R^2\omega\sin\theta d\theta R^2\sin^2\theta}{R^3} = \frac{2}{3}\mu_0\sigma R\omega}$$

Critério de correção (3,0 pt).

- 2,0 pt: expressão correta de $\delta \vec{B}_z$.
- 1,0 pt: expressão final de $\vec{B}_z$.

Parte B. Corpo carregado deformável no centro de uma casca esférica carregada, girando (7,0 pontos)

Suponha que no centro da esfera tenha um pequeno corpo deformável de dimensões $\delta \ll R$, com densidades volumétricas homogêneas de massa, ρ, e de carga elétrica, λ. Este objeto também gira, em torno do mesmo eixo z, mas com velocidade angular Ω. O sistema é ilustrado na figura 4.

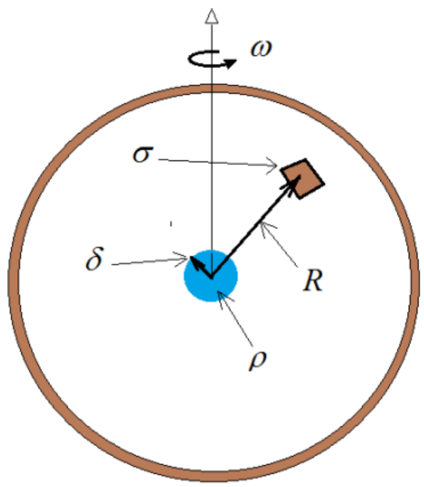


Figura 4: Casca carregada girando com corpo deformável na origem.

Sabe-se que existe uma velocidade angular $\vec{\Omega} \neq 0$ do corpo deformável no interior da esfera que rota, para a qual o dito corpo mantém a forma que tem em ausência de interações que possam deformá-lo.

B1. Calcule a velocidade angular $\vec{\Omega}$ em termos de grandezas fornecidas. Assuma que os campos elétrico e magnético são homogêneos em todo o volume do corpo deformável. 2,5pt

Gabarito:

B1. A força de Lorentz, sobre um elemento de carga δq, do corpo no centro da casca é

$$\vec{f_L} = \delta q[\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})] = \lambda \delta V[\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})]$$

O campo elétrico no centro da casca é nulo, então

$$\vec{f_L} = \lambda \delta V[\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})]$$

Do item anterior, sabemos que $\vec{B}$ não depende de $\vec{r}$, assim

$$\vec{f_L} = \lambda \delta V[\vec{v} \times \vec{B}]$$

Da segunda lei de Newton

$$\vec{f_L} = \delta m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \lambda \delta V(\vec{v} \times \vec{B}) = \delta m \frac{d}{dt}(\Omega \times \vec{r}) = \delta m \left(\Omega \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \delta m\,(\Omega \times \vec{v}) = -\delta m\,(\vec{v} \times \Omega)$$

onde $\vec{r}$ é o vetor de posição do elemento de massa (carga) do corpo.

$$\lambda\delta V(\vec{v}\times\vec{B}) = -\rho\delta V(\vec{v}\times\Omega) \Rightarrow \lambda(\vec{v}\times\vec{B}) + \rho(\vec{v}\times\Omega) = 0$$

Dai

$$\vec{v}\times(\lambda\vec{B}+\rho\vec{\Omega}) = 0 \Rightarrow \lambda\vec{B} = -\rho\vec{\Omega}$$

Finalmente

$$\boxed{\vec{\Omega} = -\frac{\lambda}{\rho}\vec{B} = -\frac{\lambda}{\rho}\frac{2\mu_0 R\omega\sigma}{3}\hat{z}}$$

Critério de correção (2,0 pt).

- 1,5 pt: expressão correta de $\vec{f_L} = -\delta m(v \vec{\times} \Omega)$.
- 1,0 pt: expressão final para $\vec{\Omega}$.

B2. Encontre a carga líquida superficial que iguala ambas as velocidades angulares, $\vec{\omega}$ *e* $\vec{\Omega}$. 1,5pt

Gabarito:

B2. Usando o resultado do item anterior

$$\Omega = \omega = -\frac{\lambda}{\rho}\frac{2\mu_0 R\omega\sigma}{3} \Rightarrow |\sigma| = \frac{3\rho}{2\pi\mu_0|\lambda|R}.$$

Daí

$$\boxed{Q = 4\pi R^2|\sigma| = \frac{6\pi\rho R}{\mu_0\lambda}}$$

Critério de correção (1,5 pt).

- 1,0 pt: expressão correta de σ.
- 0,5 pt: expressão final para Q.

B3. Que sinais devem ter as cargas, superficial e do corpo deformável, para que este último gire no mesmo sentido que a casca? 0,5pt

Gabarito:

B3. A partir da expressão de $\vec{\Omega}$, vemos que, se σ e λ tem sinais opostos, Ω é positiva, ou seja, terá o mesmo sentido que $\vec{\omega}$. Isto é compatível com o fato da força de interação entre a casca e o corpo ser atrativa, dessa forma, a casca “arrasta”o corpo à rotação.

Critério de correção (0,5 pt).

- 0,5 pt: pela explicação acima ou outra semelhante, aceitável.

A analogia entre a lei de Coulomb e a lei de gravitação universal, no limite de campos fracos e pequenas velocidades, permite descrever os efeitos gravitacionais através de analogias eletromagnéticas. De acordo com isto, o sistema anterior é análogo a uma esfera coberta com uma densidade superficial de massa, σ_g, que gira, e um corpo deformável no interior, análogo ao anterior, particularmente, na sua densidade de massa, ρ, ajustando corretamente os parâmetros. Considere que este ajuste se obtêm substituindo as densidades de carga superficial da esfera e volumétrica do corpo deformável segundo as regras: $\sigma \to \sqrt{4\pi\epsilon_0 G}\sigma_g$ e $\lambda \to \sqrt{4\pi\epsilon_0 G}\rho$.

B4. Utilize o resultado do item B2. e as regras de substituição dadas para determinar a razão entre a massa líquida superficial que igualaria as duas velocidades angulares no caso gravitacional, e a massa de um buraco negro $M_{BN} = \dfrac{c^2 R}{2G}$, com raio R igual ao da casca. 2,5pt

Gabarito:

B4. Usando as substituições propostas

$$\lambda \to \sqrt{4\pi\epsilon_0 G}\rho$$

$$\sigma \to \sqrt{4\pi\epsilon_0 G}\sigma_g$$

$$Q = \frac{6\pi\rho R}{\mu_0 \lambda} = \frac{6\pi\rho R}{\mu_0\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}\rho} = 4\pi R^2\sigma = 4\pi R^2\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}\sigma_g$$

Dai

$$\boxed{M_g = \frac{6\pi R}{\mu_0 4\pi\epsilon_0 G} = \frac{3Rc^2}{2G} = 3M_{BN}}$$

Critério de correção (2,5 pt).

- 1,5 pt: pelas expressão correta de Q que leva à igualdade relacionando ρ e σ_g.
- 1,0 pt: pela expressão final para M_g.

Q4 - Contando colisões relativísticas (10 pontos)

Considere duas partículas pontuais de massas (de repouso) M e m, se movendo ao longo do eixo x (fig. 5). Inicialmente, a massa M se encontra com momento p_0, andando em direção a massa m (em repouso). Após a primeira colisão, a massa m é lançada em direção a parede, onde ela ira colidir e refletir, até colidir com M novamente. Esse processo se repete, até a massa M eventualmente mudar de direção.

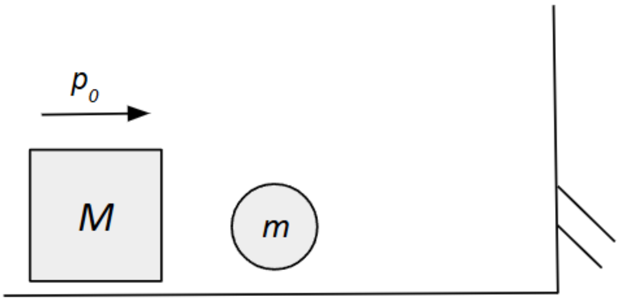


Figura 5: O estado inicial, antes da primeira colisão entre as massas M,m.

Este cenário é um problema famoso na mecânica clássica. Discutiremos a seguir a sua versão *relativística*. O objetivo será estimar o número N de colisões entre as massas até a direção de movimento de M se inverter.

Parte A: Caso clássico

Digamos que, em determinado instante, M encontra com momento p no eixo x, e está prestes a colidir com a outra massa m se movendo com momento $-\mathsf{q}$. Depois da colisão, ambas M e m se movem na mesma direção com momentos p' e q' respectivamente (fig. 6).

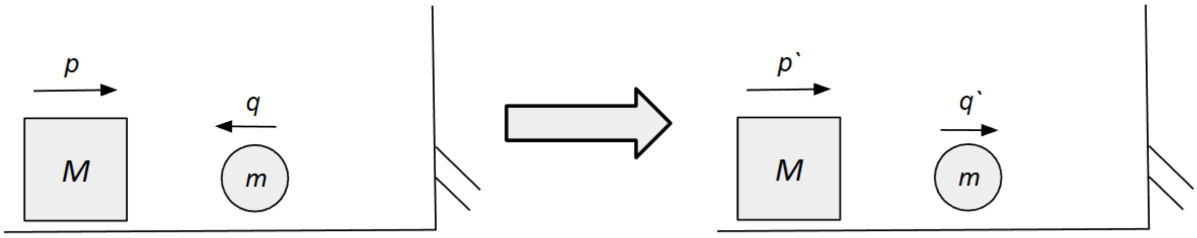


Figura 6: O instante da colisão. Momentos $(\mathsf{p}, -\mathsf{q})$ (antes) se transformam em $(\mathsf{p}', \mathsf{q}')$ (depois).

Assuma que todas as colisões, entre as massas e com a parede, são perfeitamente elásticas, e que as massas deslizam sobre a superfície sem atrito.

A1.	Escreva a equação de conservação de energia (relativística) durante a colisão da fig. 6, relacionando p,q, p',q', M, m, e a velocidade da luz c.	0,5pt

No resto da parte **A**, estudaremos o limite clássico, onde $\mathsf{p}, \mathsf{q} \ll \mathsf{M} \cdot c, \mathsf{m} \cdot c$.

A2.	Neste limite clássico, esboçe o espaço de fase do sistema. Isto é, desenhe um gráfico 2D, com eixos (p,q), representando os valores de momento admissíveis dado apenas a equação de conservação de energia. Indique pontos notáveis no seu esboço, em função de $\mathsf{M}, \mathsf{m}, \mathsf{p}_0$. **Dica:** O formato da curva é uma cônica.	0,5pt

A3.	Escreva a equação de conservação de momento durante a colisão da fig. 6, relacionando p,q, p',q'. Faria alguma diferença se as partículas fossem relativísticas?	0,5pt

No gráfico do espaço de fase do item **b**, o sistema inicialmente se encontra na coordenada $(\mathsf{p}_0, 0)$. Agora, estudaremos como o sistema evolui após as colisões, neste gráfico.

A4.	No contexto da fig. 6 (e novamente, no caso clássico), digamos que o sistema se encontre na coordenada $(\mathsf{p}, -\mathsf{q})$, onde $\mathsf{p}, \mathsf{q} > 0$. Faça outro esboço do espaço de fase, e represente os pontos $(\mathsf{p}, -\mathsf{q})$ (antes da colisão) e $(\mathsf{p}', \mathsf{q}')$ (depois) no seu esboço. Represente também a configuração do sistema após m refletir na parede.	0,5pt

A5. Mostre que, no limite onde $\mathsf{p}_0 \ll \mathsf{m} \cdot c \ll \mathsf{M} \cdot c$, o número de colisões até M mudar de direção é — 1,0pt

$$N_{\text{clássico}} \approx \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{\mathsf{M}}{\mathsf{m}}} \tag{2}$$

Dica: Normalize os eixos do espaço de fase, para o diagrama virar um círculo: $(\mathsf{p},\mathsf{q}) \to (\mathsf{p}/\sqrt{\mathsf{M}}, \mathsf{q}/\sqrt{\mathsf{m}})$. Neste círculo, qual o ângulo entre (p,q) e $(\mathsf{p}',\mathsf{q}')$?

Gabarito:

A1) Por conservação de energia, temos:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + M^2c^4} + \sqrt{q^2 + m^2c^4} = \sqrt{p'^2c^2 + M^2c^4} + \sqrt{q'^2c^2 + m^2c^4} \tag{3}$$

Marking Scheme:

- +0,5 pontos por escrever a expressão correta de E

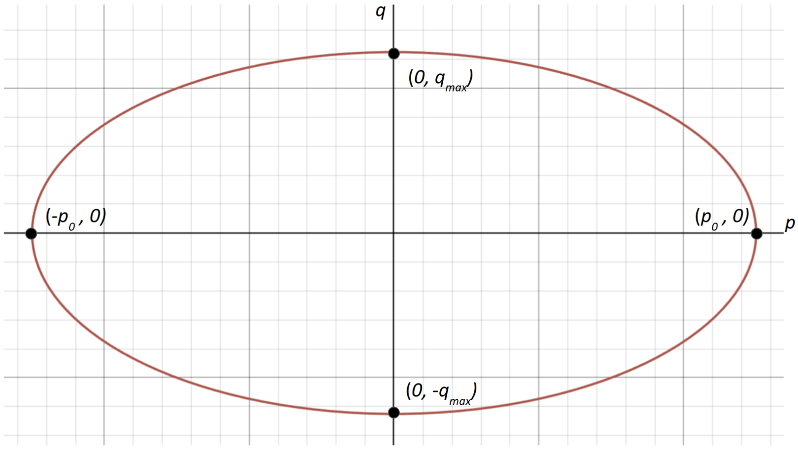
A2) Classicamente, temos $M \cdot c \gg p$ e $m \cdot c \gg q$, e a equação de conservação de energia nesse limite implica:

$$E = \frac{p^2}{2M} + \frac{q^2}{2m} \tag{4}$$

Dado que energia é conservada e originalmente temos $E = \frac{p_0^2}{2M}$:

$$\left(\frac{p_0}{\sqrt{M}}\right)^2 = \left(\frac{p}{\sqrt{M}}\right)^2 + \left(\frac{q}{\sqrt{m}}\right)^2 \tag{5}$$

Que implica uma elipse para p,q, como esboçado abaixo:



Note que q_{max} acima, é dado por:

$$\frac{p_0^2}{2M} = \frac{q_{max}^2}{2m} \implies q_{max} = p_0\sqrt{m/M}. \tag{6}$$

Marking Scheme:

- +0,2 pontos por reconhecer que no limite clássico temos $E = \frac{p^2}{2M} + \frac{q^2}{2m}$
- +0,1 pontos pelo esboço da elipse
- +0,1 pontos por indicar os pontos $(\pm p_0,0)$ e $(\pm 0, q_{max})$
- +0,1 pontos pela expressão correta de q_{max} no esboço

A3)

Por conservação de momento:

$$p - q = p' + q' \tag{7}$$

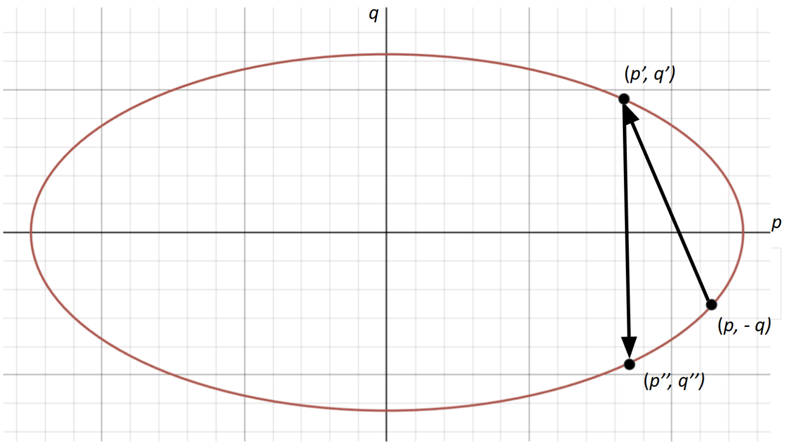
Essa equção é valida sempre.

Marking Scheme:

- +0,4 pontos pela equação de conservação de momento
- +0,1 pontos por indicar que é valida sempre
- Não penalize caso o aluno escreva $p + q = p' + q'$ desde que reconheça que q é negativo

A4)

No espaço de fases, podemos obter o estado do sistema depois da colisão (p',q') obtendo a intersecção da elipse de p,q com a equação de conservação de momento, $p' + q' =$ Constante, como na figura abaixo entre os pontos $(p, -q)$ e (p',q')



Depois da colisão com a parede, temos que o momento da massa m se inverte, que corresponde a uma reflexão no plano x, como a seta entre os pontos (p',q') e (p'',q'') acima.

Marking Scheme:

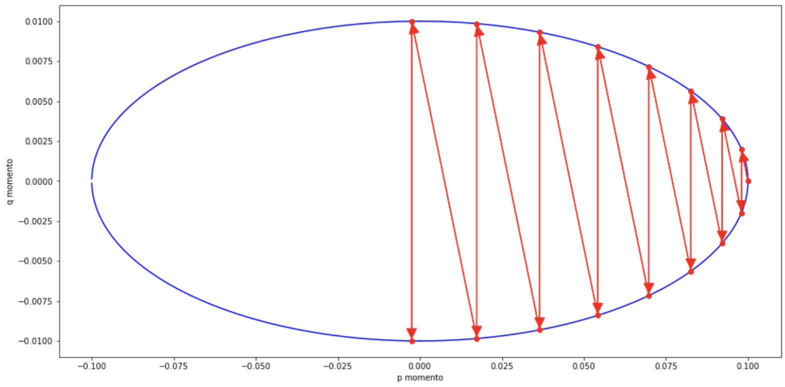
- +0,3 pontos por notar graficamente que apos a colisão pode se obter (p',q') pela interseção entre a elipse do espaço de fases e conservação de momento.
- +0,2 pontos por notar que graficamente a colisão com a parede representa uma reflexão pelo eixo horizontal

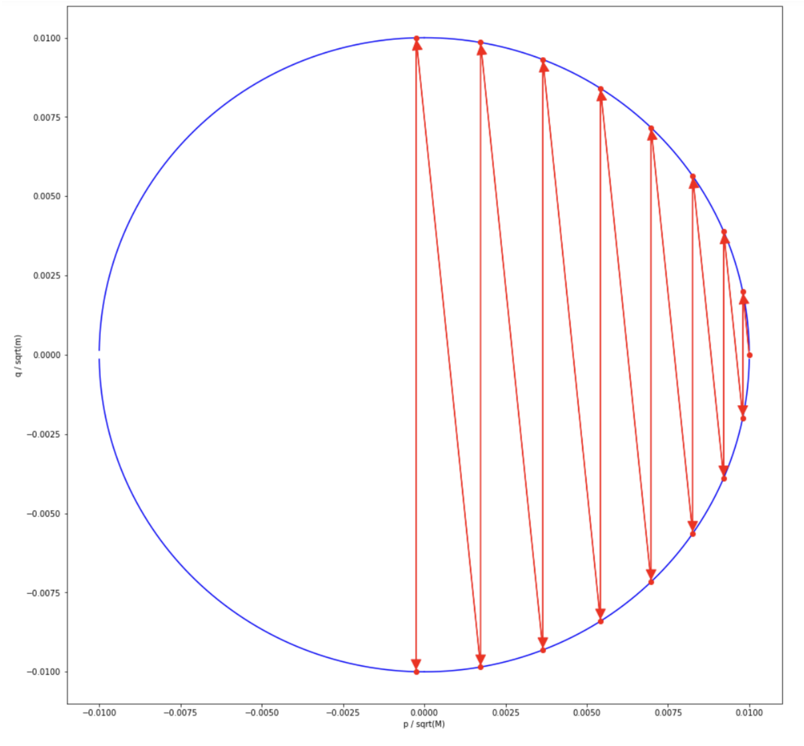
A5)

Dada a dica, vamos escalar a equação da elipse p,q por $1/\sqrt{M}, 1/\sqrt{m}$ respectivamente, da forma $x = p/\sqrt{M}, y = q/\sqrt{m}$ para que a equação da elipse se torne $x^2 + y^2 =$ Constante. Dessa forma, o espaço de fases para x,y define um circulo.

Alem disso, note que por conservaçao de momento, *apos cada colisão* temos $p + q =$ Constante $\implies x\sqrt{M} + y\sqrt{m} =$ Constante. Ou seja, conservação de momento implica uma reta no plano x,y com inclinação $-\sqrt{M/m}$.

Alem disso, perceba que apos cada colisão o momento da massa m se inverte, logo temos a seguinte trajetoria no espaço de fases (e também no sistema de coordenadas x,y):





Os graficos acima são com $M = 100, m = 1, v_0 = c/1000$. Note que apos cada colisão entre as massas, e depois com a parede, temos que um ponto (x,y) é rotacionado por um angulo $\theta = 2\sqrt{m/M}$ ao longo do circulo, e apos N colisões tal que $N\theta = \pi/2$ a direção de m se inverte. Assim, obtemos que com N:

$$N \approx \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{M}{m}} \tag{8}$$

colisões M muda de direção.

Marking Scheme:

- +0,4 pontos por notar que no sistema $x = p/\sqrt{M}, y = q/\sqrt{m}$ o espaço de fases é um circulo
- +0,1 pontos por notar que o angulo entre (p,q) e (p',q') é $2\theta = 2\sqrt{m/M}$
- +0,4 pontos por notar que precisamos de uma rotação de $\pi/2$ graus para inverter o momento de M
- +0,1 pontos pela expressão correta de N
- Note que tem multiplos outros metodos de obter esse resultado, incluindo tomar um limite contínuo das colisões por exemplo. Qualquer metodo que obtenha N corretamente também ganha pontos integrais.

Parte B: Caso ultra-relativístico

No regime *ultra-relativístico*, as partículas se movem com momentos muito maiores que seus respectivos momentos de repouso, isto é, $\mathsf{p} \gg \mathsf{m} \cdot c$. Nessa situação, a energia total de cada partícula é dominada pela contribuição cinética, com o espaço de fases assumindo uma geometria característica desse limite extremo.

Na parte **B**, considere o limite onde o momento inicial p_0 da massa M satisfaz:

$$\mathsf{p}_0 \gg \mathsf{M} \cdot c, \quad \mathsf{p}_0 \gg \mathsf{m} \cdot c, \quad \mathsf{p}_0 \gg \frac{\mathsf{M}^2}{\mathsf{m}} \cdot c, \quad \mathsf{M} \gg \mathsf{m} \tag{9}$$

B1.	Esboçe o espaço de fase (p,q) do sistema nesse limite ultra-relativístico. Qual é o formato da figura encontrada?	1,5pt

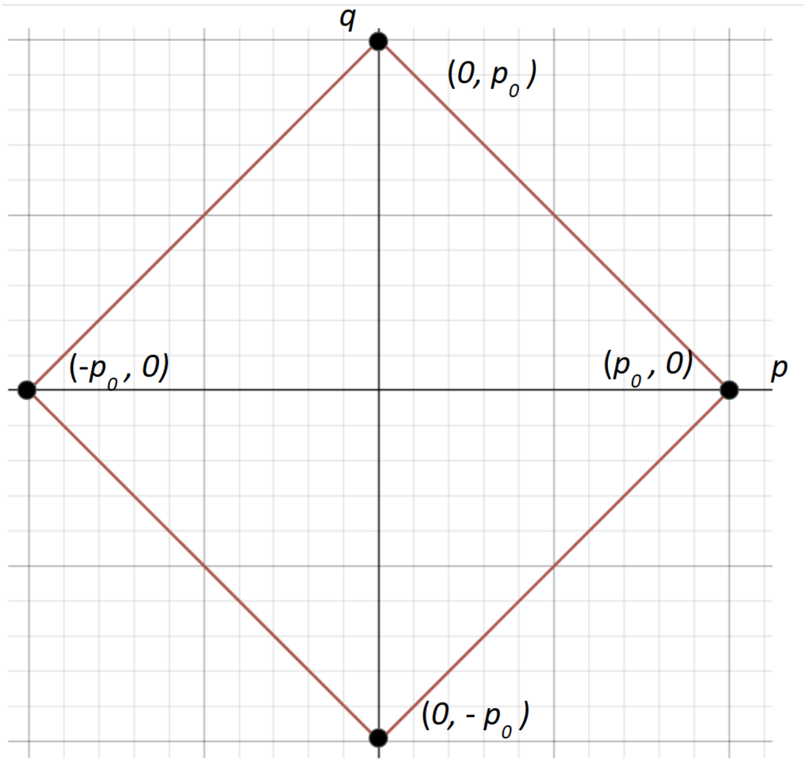
B2.	Neste limite, quantas colisões entre M, m são necessárias até M mudar de direção?	1,5pt

Gabarito:

B1)

No limit ultra-relativístico, a equação de conservação de energia se torna:

$$E \approx p_0 c \approx |p|c + |q|c \tag{10}$$



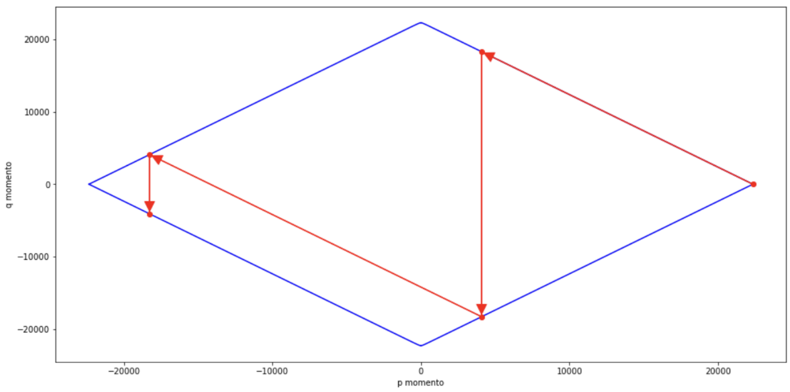
Que define efetivamente um losango no espaço p,q.

Marking Scheme:

- +1,0 pontos por notar que no limite ultra-relativístico temos $E = (|p| + |q|)c$.
- +0,4 pontos pelo esboço do losango
- +0,1 pontos por indicar que os limites do gráfico são $(\pm p_0, 0)$ e $(0, \pm p_0)$

B2)

Como o espaço de fases começa em $(p_0, 0)$, por conserva¸ão de momento graficamente, a evolução é tem que ser da seguinte forma:



No grafico acima note $M = 100, m = 1, v_0 = 0.99999c$.

Logo temos aproximadamente apenas 2 colisões nesse limite. A primeira retira a maioria do momento de M, e a segunda inverte o movimento.

Alternativamente, analiticamente, temos as seguintes equações:

$$E_{tot} = \sqrt{p_0^2 + M^2} + m = E_0 + m = \sqrt{p^2 + M^2} + \sqrt{q^2 + m^2} \tag{11}$$

e

$$p_0 = p + q \Rightarrow q = p_0 - p \tag{12}$$

Incluindo isso na primeira equação temos que (usando $c = 1$ por simplicidade)

$$E_0 + m = \sqrt{p^2 + M^2} + \sqrt{(p_0 - q)^2 + m^2} \Rightarrow (E_0 + m - \sqrt{p^2 + M^2})^2 = (p_0 - p)^2 + m^2 \tag{13}$$

$$(E_0 + m)^2 - 2(E_0 + m)\sqrt{p^2 + M^2} + p^2 + M^2 = p_0^2 - 2p_0 p + p^2 + m^2 \tag{14}$$

$$(E_0 + m)^2 - 2(E_0 + m)\sqrt{p^2 + M^2} + M^2 = p_0^2 - 2p_0 p + m^2 \tag{15}$$

$$2(E_0 + m)\sqrt{p^2 + M^2} = (E_0 + m)^2 + M^2 - p_0^2 + 2p_0 p - m^2 = E_0^2 + 2E_0 m + M^2 - p_0^2 + 2p_0 p \tag{16}$$

$$(E_0 + m)\sqrt{p^2 + M^2} = E_0 m + M^2 + p_0 p \tag{17}$$

Usando a definição de E_0. Assim:

$$\sqrt{p^2 + M^2} = \frac{E_0 m + M^2 + p_0 p}{E_0 + m} \tag{18}$$

$$(p^2 + M^2)(E_0 + m)^2 = (E_0 m + M^2 + p_0 p)^2 \tag{19}$$

$$\begin{aligned} p^2 E_0^2 + 2p^2 E_0 m + p^2 m^2 + M^2 E_0^2 + 2M^2 E_0 m + M^2 m^2 = E_0^2 m^2 + 2E_0 m M^2 \\ +2E_0 m p_0 p + M^4 + 2M^2 p_0 p + p_0^2 p^2 \end{aligned} \tag{20}$$

Que usando novamente a definição de E_0 simplifica em:

$$(p - p_0)\Big(p(M^2 + m^2 + 2E_0 m) - p_0(M^2 - m^2)\Big) = 0 \tag{21}$$

E assim, $p = p_0$ (o estado inicial), ou:

$$p = p_0 \frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2 + 2E_0 m} = p_0 \frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2 + 2m\sqrt{p_0^2 + M^2}} \tag{22}$$

Finalmente, usando que $p_0 \gg M$ e tambem que $p_0 \gg \sqrt{Mm}, M \gg m$, temos que:

$$p = p_0 \frac{M^2}{2p_0 m} = \frac{M^2}{2m} \ll p_0, q = p_0 - \frac{M^2}{2m} \approx p_0 \tag{23}$$

Logo, a maioria do momento é transferido para m. Assim, depois da proxima colisão M ira se inverter.

Marking Scheme:

- +1,0 pontos por notar que graficamente ou analiticamente que apos a primeira colisão a maioria do momento de M é perdida nesse limite
- +0,5 pontos por argumentar que apos a segunda colisão M muda de direção
- Note que tem multiplos metodos de resolver este problema. Qualquer argumento que no limite ultrarelativístico temos um número **constante** de colisões ganha pontos integrais.

Parte C: Limite semi-relativístico

A suposição que $\mathsf{m} \ll \mathsf{M}$ abre as portas para um terceiro caso muito curioso, onde uma das partículas (a massona) é clássica, enquanto a outra (a massinha) é ultra-relativistica. Nesta parte **C**, estudaremos este limite *semi-relativístico*, onde o momento inicial p_0 da massa M satisfaz:

$$\mathsf{M} \cdot c^2 \quad \gg \quad \frac{\mathsf{p}_0^2}{2\mathsf{M}} \quad \gg \quad \mathsf{m} \cdot c^2 \tag{24}$$

O que faz esse limite tão curioso, é que o sistema passa por três estágios diferentes, onde

1. primeiramente, m começa em repouso, e inicialmente se comporta classicamente, porque $\mathsf{q} \ll \mathsf{m} \cdot c$.
2. Eventualmente, após várias colisões, $\mathsf{q} \sim \mathsf{m} \cdot c$, e ela começa a se comportar de modo relativístico.
3. Finalmente, $\mathsf{q} \gg \mathsf{m} \cdot c$, e a massinha vira ultra-relativística.

Hoje, desprezaremos os primeiros dois estágios, e estudaremos apenas o terceiro para estimar o número de colisões até M mudar de direção.

C1. Usando a equação de conservação de energia neste limite semi-relativistico, já no terceiro estágio (onde $\mathsf{q} \gg \mathsf{m} \cdot c$), mostre que o momento q da massinha satisfaz: 1,0pt

$$\mathsf{q} \approx \mathsf{m} \cdot c \quad + \quad f(\mathsf{M}, \mathsf{p}, \mathsf{p}_0, c) \tag{25}$$

e encontre a função $f(\mathsf{M}, \mathsf{p}, \mathsf{p}_0, c)$.

C2. No contexto da fig. 6, obtenha uma expressão aproximada para $\Delta\mathsf{p} = \mathsf{p}' - \mathsf{p}$. Novamente, considere o limite semi-relativístico. 2,0pt
Dê sua resposta em função apenas de q.

Dica: Pode ser útil a seguinte aproximação para $|nx| \ll 1$:

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx \tag{26}$$

O caso semi-relativístico é bem mais complexo que os anteriores, logo consideramos um metódo diferente para contar as colisões. Considere um limite contínuo das colisões, onde o momento $\mathsf{p}(n)$ da massa M após a n-ésima colisão (aproximadamente) satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\mathsf{p}(n) \approx \Delta\mathsf{p}(n) \quad \text{(calculado no item acima)} \tag{27}$$

Por simplicidade, assuma que seu resultado na parte **C.1** é válida sempre na região de momento da massa M p de p_0 até 0. Dado isso, usando a sua resposta dos dois itens acima, resolva:

C3. Estime o número de colisões N até M mudar de direção, neste limite semi-relativístico, usando apenas a dinâmica do terceiro estágio. 1,0pt
Dê sua resposta em função de $\mathsf{M}, \mathsf{m}, c$ e p_0.

Dica: Utilize a seguinte integral

$$\int_0^a \frac{dx}{b^2 - x^2} = \frac{1}{2b} \ln\left(\frac{b+a}{b-a}\right), \quad \text{onde} \quad b > a > 0. \tag{28}$$

Gabarito:

C1)

No regime com $q \gg m \cdot c$, temos por conservação de energia:

$$mc^2 + Mc^2 + \frac{p_0^2}{2M} \approx q \cdot c + \frac{m^2c^3}{2q} + Mc^2 + \frac{p_0^2}{2M} \tag{29}$$

Desprezando o ultimo termo de $\frac{m^2c^3}{2q}$, temos:

$$q \approx mc + \frac{1}{2Mc}(p_0^2 - p^2) \tag{30}$$

Logo, $f(M, p_0, p, c) = \frac{1}{2Mc}(p_0^2 - p^2)$.

Marking Scheme:

- +0,5 pontos por aplicar conservação de energia e obter uma equação para obter q
- +0,5 pontos por desprezar fatores quadraticos em m, e obter $f(M, p_0, p, c)$ corretamente

C2)

Tendo m como ultra-relativístico, temos as equações (usando $c = 1$ por simplicidade):

$$\frac{p^2}{2M} + q = \frac{p'^2}{2M} + q' \tag{31}$$

$$p - q = p' + q' \Rightarrow q' = p - q - p' \tag{32}$$

Assim:

$$\frac{p^2}{2M} + q = \frac{p'^2}{2M} + p - q - p' \tag{33}$$

$$\frac{p'^2}{2M} - p' + (p - 2q - \frac{p^2}{2M}) = 0 \Rightarrow p'^2 - 2Mp' + (2Mp - 4Mq - p^2) = 0 \tag{34}$$

$$p' = \frac{1}{2}\left(2M \pm \sqrt{4M^2 - 4(2Mp - 4Mq - p^2)}\right) = M \pm \sqrt{M^2 - 2Mp + p^2 + 4Mq} \tag{35}$$

$$p' = M \pm \sqrt{(M-p)^2 + 4Mq}$$

Apenas a raiz negativa diminui o momento de M, logo $p' = M - \sqrt{(M-p)^2 + Mq}$.

Agora, como $p \ll M$, $q \ll M$, temos que:

$$p' = M - \sqrt{(M-p)^2 + Mq} \approx M - (M-p)\left(1 + \frac{2Mq}{(M-p)^2}\right) \tag{36}$$

Onde usamos a aproximação para $(1+x)^n$ na ultima etapa acima. Assim, $\Delta p = p' - p$ é

$$\Delta p = p' - p = M - p - (M-p)\left(1 + \frac{2Mq}{(M-p)^2}\right) = -\frac{2Mq}{M-p} \approx -2q \tag{37}$$

Alternativamente, outro modo de solução consideravelmente mais simples, é notar que no limite $M \gg m$, a massona M efetivamente age como um espelho, e a massa m efetivamente reflete em torno de M. Dessa forma, pode se afirmar que a variação de momento da massa m é $2q$, e assim da massa M é também $-2q$.

Marking Scheme:

- +0,5 pontos por conservação de energia no limite m ultrarelativístico
- +0,5 pontos por obter uma equação quadratica correta para p'
- +0,5 pontos por escolher a solução correta para p' da quadratica
- +0,5 pontos pela expressão correta para Δp.
- Note: como tem varios metodos de resolver este problema, qualquer metodo que argumenta corretamente que $\Delta p = -2q$ ganha pontos integrais.

C3)

Dada a equação diferencial:

$$\frac{dp}{dn} = -2(m + \frac{1}{2M}(p_0^2 - p^2)) = -\frac{1}{M}\left(2mM + p_0^2 - p^2\right) = \tag{38}$$

E assim, temos que o número de colisões para o momento p ir de p_0 ate 0 é dado por:

$$N = M \int_0^{p_0} \frac{dp}{2mM + p_0^2 - p^2} \tag{39}$$

Que é a integral dada caso percebemos:

$$b = \sqrt{p_0^2 + 2mM} = p_0\sqrt{1 + \frac{2mM}{p_0^2}} \approx p_0 + \frac{mM}{p_0}, \text{ e } a = p_0 \tag{40}$$

Note que $mM/p_0 \ll 1$, ja que $p_0^2 \gg mM$, assim:

$$N = \frac{M}{2b} \ln \frac{b+a}{b-a} \approx \frac{M}{2p_0} \ln \frac{2p_0}{mM/p_0} = \frac{M}{2p_0} \ln \frac{2p_0^2}{mM} \tag{41}$$

Assim, ignorando fatores additivos e multiplicativos de segunda ordem/proporcionalidade, obtemos:

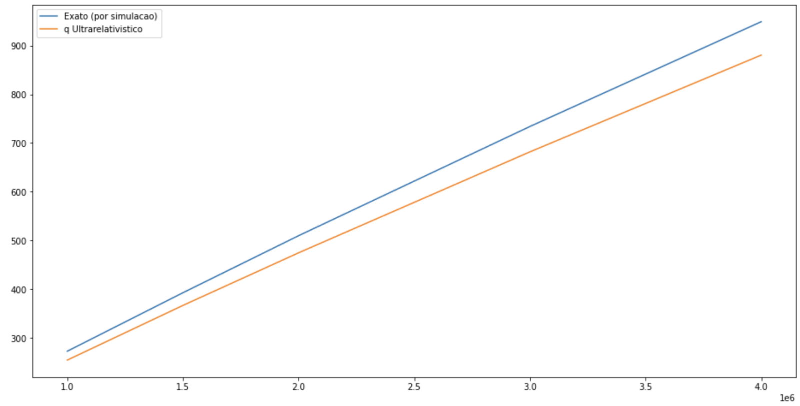
$$N \sim \frac{M}{p_0} \ln \frac{p_0^2}{mM} \tag{42}$$

Notavelmente, esse resultado agora depende do momento de uma forma bem interessante!

Marking Scheme:

- Dado que esse item pede estimativas para N, seja bem liberal na correção e na precisão em fatores de M,m e p_0.
- +0,4 pontos pela integral de N em função de uma integral combinando os ultimos dois resultados da parte **C**.
- +0,6 pontos pela expressão final de N a par de constantes multiplicativas/aditivas

Para os interessados, empiracamente o resultado acima é razoavelmente preciso. Abaixo esta um grafico para $p_0 = 20000, m = 0.03$ e variando M entre 10^6 e $4 \cdot 10^6$ (em unidades normalizadas com $c = 1$), com eixo x sendo M e y sendo o número de colisões.



O erro relativo é $\leq 7.5\%$, então a expansão e metodo em geral é razoavelmente decente.

Q5 - Partícula confinada em um poço com barreiras finas (10 pontos)

Considere uma partícula quântica de massa m, em uma região unidimensional. A partícula está inicialmente confinada na região central $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$, que chamaremos de "poço". Nas bordas do poço existem duas barreiras de potencial idênticas, cada uma de espessura $\varepsilon \ll a$ e altura V_0, centradas nas posições $x = -\frac{a}{2}$ e $x = +\frac{a}{2}$. Fora dessas duas barreiras, o potencial é praticamente nulo e a partícula, se escapar, pode se mover livremente. Um diagrama simplificado do potencial efetivo é mostrado abaixo.

$$V(x) \approx \begin{cases} 0, & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \quad \text{(interior do poço)} \\ V_0, & \text{regiões finas de largura } \varepsilon \text{ em } x = \pm\frac{a}{2} \\ 0, & \text{fora das barreiras} \end{cases}$$

Assuma que sabemos que existe inicialmente uma partícula dentro do poço.

A. Usando o princípio da incerteza de Heisenberg, estime a altura mínima da barreira de potencial V_0 necessária para confinar a partícula dentro da região $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$. Discuta como essa estimativa depende dos parâmetros a, m e $\hbar$. 4,0pt

Gabarito:

A

A ideia física é a seguinte: se a partícula está localizada dentro do poço, com extensão típica de ordem a, então sua incerteza de posição Δx é da ordem de

$$\Delta x \sim a.$$

Pelo princípio da incerteza de Heisenberg,

$$\Delta x\, \Delta p \gtrsim \frac{\hbar}{2} \quad \Longrightarrow \quad \Delta p \sim \frac{\hbar}{2a}.$$

Isso sugere que a partícula, por estar espacialmente confinada, terá tipicamente um momento da ordem de Δp, e portanto uma energia cinética típica da ordem de

$$E_{\text{cin}} \sim \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{2a}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{8ma^2}.$$

Para que a partícula permaneça confinada, é necessário que essa energia típica seja menor do que a altura da barreira V_0. Caso contrário, a barreira não seria capaz de "segurar"a partícula: o estado quântico teria energia grande o suficiente para que a partícula escapasse sem precisar tunelar.

Portanto, exigimos

$$V_0 \gtrsim E_{\text{cin}} \sim \frac{\hbar^2}{8ma^2}.$$

Uma estimativa mínima razoável para a altura da barreira é então

$$\boxed{V_0^{(\text{mín})} \sim \frac{\hbar^2}{8ma^2}.}$$

Critério de correção (4,0 pt).

- 2,0 pt: uso explícito de Heisenberg $\Delta x\, \Delta p \sim \hbar/2$ para obter $\Delta p \sim \hbar/(2a)$.
- 1,0 pt: estimativa da energia cinética típica $\hbar^2/(8ma^2)$.
- 1,0 pt: argumento de que V_0 deve ser maior que essa energia para garantir confinamento.

Assuma agora que a energia média da partícula é E, com $E \ll V_0$, tal que a probabilidade T seja pequena. A partícula está inicialmente confinada no poço, mas, por efeito de tunelamento quântico, existe uma pequena probabilidade da partícula atravessar uma das barreiras finas e escapar para fora. Admita que, ao incidir uma única vez sobre uma parede, essa pequena probabilidade pode ser aproximada por

$$T \sim \exp\left[-\alpha\sqrt{V_0}\varepsilon\right],$$

em que α é uma constante física de dimensões adequadas.

B.	Utilize argumentos físicos para estimar como α deve depender das constantes do problema.	2,0pt

Gabarito:

(B)

Queremos estimar como deve ser a constante α na expressão

$$T \sim \exp\left[-\alpha\sqrt{V_0}\,\varepsilon\right],$$

onde T é a probabilidade de transmissão através de uma única barreira de potencial de altura V_0 e espessura ε, assumindo $E \ll V_0$.

A exigência física é que o expoente seja adimensional.

Logo, o produto $\alpha\sqrt{V_0}\,\varepsilon$ deve ser adimensional.

Vamos analisar cada pedaço:

- ε tem dimensão de comprimento $[L]$.
- V_0 é energia, então $\sqrt{V_0}$ tem dimensão $\sqrt{[E]}$.
- Precisamos então que $\alpha\sqrt{V_0}\,\varepsilon$ não tenha dimensão alguma.

Sabemos que, em Mecânica Quântica, a constante de Planck reduzida $\hbar$ relaciona momento e comprimento via $p \sim \hbar/L$, e que a combinação $\sqrt{2mV_0}$ tem dimensão de momento. Mais precisamente,

$$\sqrt{2mV_0} \quad \text{tem dimensão de quantidade de movimento (momento).}$$

Observe que

$$\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$$

tem dimensão de inverso de comprimento $[L]^{-1}$, pois $\hbar$ tem dimensão de momento $\times$ comprimento.

Assim,

$$\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}\,\varepsilon$$

é adimensional.

Portanto, para que o fator no expoente tenha dimensão correta, $\alpha\sqrt{V_0}$ deve ser equivalente (a menos de fator numérico) a $\sqrt{mV_0}/\hbar$. Em outras palavras, a constante α deve ter a forma

$$\alpha \sim \frac{\sqrt{m}}{\hbar}.$$

Critério de correção (2,0 pt).

- 1,0 pt: argumento dimensional mostrando que o expoente deve ser adimensional e levando à combinação $\sqrt{2mV_0}\,\varepsilon/\hbar$.
- 1,0 pt: conclusão de que $\alpha \sim \sqrt{m}/\hbar$, ou forma equivalente que exponha as dependências em m e $\hbar$.

Eventuais fatores numéricos no parâmetro α podem ser desconsiderados para os objetivos de estimativa dessa questão. A partícula se move aproximadamente livre dentro do poço, batendo sucessivamente contra as barreiras e tentando escapar a cada colisão com probabilidade T muito pequena em cada colisão.

C.	Estime o tempo de meia-vida de confinamento da partícula dentro do poço, isto é, o tempo necessário para que a probabilidade de ainda encontrá-la no interior do poço caia para metade do valor inicial. Sua resposta deve ser dada em termos de a, ε, m, $\hbar$, E e V_0.	4,0pt

Gabarito:

(C)

A partícula oscila para a esquerda e para a direita dentro do poço quase como uma partícula livre. Cada vez que ela chega perto de uma barreira, há uma chance pequena de tunelar e escapar.

i) Estimar a velocidade típica dentro do poço.

Se a energia média é E (puramente cinética, já que dentro do poço o potencial é aproximadamente zero), então

$$E \sim \frac{p^2}{2m} \quad \Longrightarrow \quad p \sim \sqrt{2mE}.$$

Logo, a velocidade típica é

$$v \sim \frac{p}{m} = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

ii) Estimar a frequência de colisões com uma barreira.

A partícula percorre uma distância da ordem de a para ir de uma barreira até a outra. Assim, o tempo típico entre colisões com a mesma barreira é da ordem de

$$\tau_{\text{viagem}} \sim \frac{a}{v} = \frac{a}{\sqrt{2E/m}} = a\sqrt{\frac{m}{2E}}.$$

Portanto, a taxa com que a partícula "bate"em uma dada barreira é da ordem de

$$f_{\text{col}} \sim \frac{1}{\tau_{\text{viagem}}} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Como existem duas barreiras (em $x = -a/2$ e $x = +a/2$), a taxa total de tentativas de fuga é aproximadamente o dobro:

$$f_{\text{tent}} \sim \frac{2}{a}\sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

iii) Estimar a probabilidade de transmissão por tunelamento em uma barreira.

Para uma barreira de altura V_0 e largura ε, com $E \ll V_0$, a probabilidade de tunelamento (transmissão) é exponencialmente suprimida. Uma estimativa padrão, sem resolver a equação de Schrödinger em detalhe, é escrever a atenuação como

$$T \sim \exp[-2\kappa\varepsilon], \quad \text{com} \quad \kappa \sim \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \approx \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} \quad (E \ll V_0).$$

Ou seja,

$$T \sim \exp\left[-2\varepsilon\,\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}\right].$$

Isso significa: a cada colisão com a barreira, a probabilidade de escapar é aproximadamente T.

iv) Estimar a taxa de escape.

A taxa de escape Γ (probabilidade por unidade de tempo de escapar) é, aproximadamente,

$$\Gamma \sim f_{\text{tent}} \times T \sim \left(\frac{2}{a}\sqrt{\frac{2E}{m}}\right) \exp\left[-2\varepsilon\,\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}\right].$$

v) Relacionar a taxa de escape ao tempo de meia-vida.

Se a probabilidade $P(t)$ de a partícula ainda estar no poço decai aproximadamente de forma exponencial,

$$P(t) \sim e^{-\Gamma t},$$

então o tempo de meia-vida $\tau_{1/2}$ é definido por $P(\tau_{1/2}) = 1/2$, isto é,

$$\frac{1}{2} = e^{-\Gamma \tau_{1/2}} \quad \Longrightarrow \quad \tau_{1/2} = \frac{\ln 2}{\Gamma}.$$

Substituindo Γ:

$$\tau_{1/2} \sim \frac{\ln 2}{\left(\frac{2}{a}\sqrt{\frac{2E}{m}}\right) \exp\left[-2\varepsilon\,\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}\right]} = \frac{\ln 2}{2}\, a \sqrt{\frac{m}{2E}}\, \exp\left[2\varepsilon\,\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}\right].$$

Portanto, uma estimativa para o tempo de meia-vida de confinamento é

$$\boxed{\tau_{1/2} \sim \frac{\ln 2}{2}\, a \sqrt{\frac{m}{2E}}\, \exp\left[2\varepsilon\,\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}\right].}$$

Critério de correção (4,0 pt).

- 1,0 pt: estimar velocidade típica $v \sim \sqrt{2E/m}$ e taxa de colisão $\sim v/a$.
- 1,0 pt: estimar a frequência de choques.
- 1,0 pt: combinar a taxa de choques com a probabilidade individual de tunelamento para obter Γ.
- 1,0 pt: combinar os resultados para obter Γ e $\tau_{1/2} = (\ln 2)/\Gamma$.

Observação: Podem haver outros caminhos ligeiramente diferentes de estimativa possíveis. De maneira geral, diferenças de fatores numéricos podem ser toleradas desde que argumentos equivalentes à solução oficial sejam apresentados.