

“Light is absorbed and emitted in lumps, or quanta. It is the same thing that causes reflection, refraction, and all optical phenomena.” — Richard P. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics**, Vol. I (1963). Tradução livre: “A luz é absorvida e emitida em pacotes, ou quanta. É o mesmo fenômeno que causa a reflexão, a refração e todos os fenômenos ópticos.”

Contexto: Feynman resume a visão unificada da óptica clássica e quântica, mostrando que toda a interação entre luz e matéria — inclusive a atenuação quando passa por uma amostra — é regida por esse princípio.

Prova Experimental de Física¹

Tema: Atenuação óptica em líquidos e análise experimental de dados

Pontuação total: 40 pontos

Tempo de prova: 5 horas

Material permitido: caneta, lápis, borracha, calculadora científica não programável.

Instruções gerais

1. Leia atentamente todas as questões antes de iniciar as medições.
2. Organize seu tempo de modo a realizar o procedimento de montagem do aparelho experimental, a coleta de dados, a análise e a resposta escrita.
3. Anote sempre as unidades e apresente o procedimento adotado. Respostas sem justificativa terão perda de pontuação.
4. Os gráficos devem apresentar identificação dos eixos, unidades de medida, legendas e, quando solicitado, barras de erro.
5. Apresente as incertezas das medidas e a respectiva propagação quando solicitado. Use notação científica quando conveniente.
6. Não é permitido celular, câmeras, nem instrumentos de comunicação.
7. Existe um tempo de estabilização termoelétrica para alguns componentes do kit. Não inicie a série de medidas sem observar a estabilização conforme instruções experimentais.
8. **NÃO DESLIGUE** o equipamento em hipótese alguma após atingida a estabilização, sob risco de comprometer a integridade dos resultados.

Segurança: O kit é composto por um laser de diodo com comprimento de onda nominal 650 nm. **Não olhe diretamente para o feixe.** Evite reflexões do feixe. Manuseie vidrarias e líquidos com cuidado. Quando necessário, descarte os resíduos no recipiente fornecido.

¹Autoria: Dr. Christian Tolentino Dominguez, Dr. Mario César Soares Xavier e Ms. Fagne Fernandes Silva Justino – Departamento de Física– UEPB– Araruna-PB.

Objetivo e contextualização

O presente experimento tem como objetivo investigar a atenuação da luz emitida por um diodo laser ao atravessar colunas líquidas de diferentes alturas e composições. A intensidade luminosa transmitida é determinada indiretamente por meio da corrente elétrica gerada em um fotodetector semicondutor, cuja resposta está associada ao processo de conversão fotoelétrica.

A atividade proposta requer que você formule hipóteses físicas consistentes, desenvolva um modelo matemático adequado para descrever o comportamento experimental, realize o ajuste de curvas aos dados obtidos e interprete os resultados à luz de conceitos físicos relevantes. Entre esses conceitos destacam-se: a conversão fotoelétrica em detectores semicondutores, a energia dos fótons, a conservação de energia no processo de interação luz-matéria e as possíveis fontes de erro e incerteza experimental.

Com base nos dados experimentais, deverá ser identificada a relação funcional que melhor descreve a atenuação do sinal em função da altura da coluna líquida. Além disso, espera-se que seja analisada a dependência do coeficiente (ou fator) de atenuação com a concentração relativa de um dos corantes utilizados, bem como que sejam estimados os parâmetros físicos relevantes do modelo adotado, acompanhados de suas respectivas incertezas e de uma discussão sobre sua consistência física.

O kit experimental

O kit experimental entregue ao participante contém os seguintes itens:

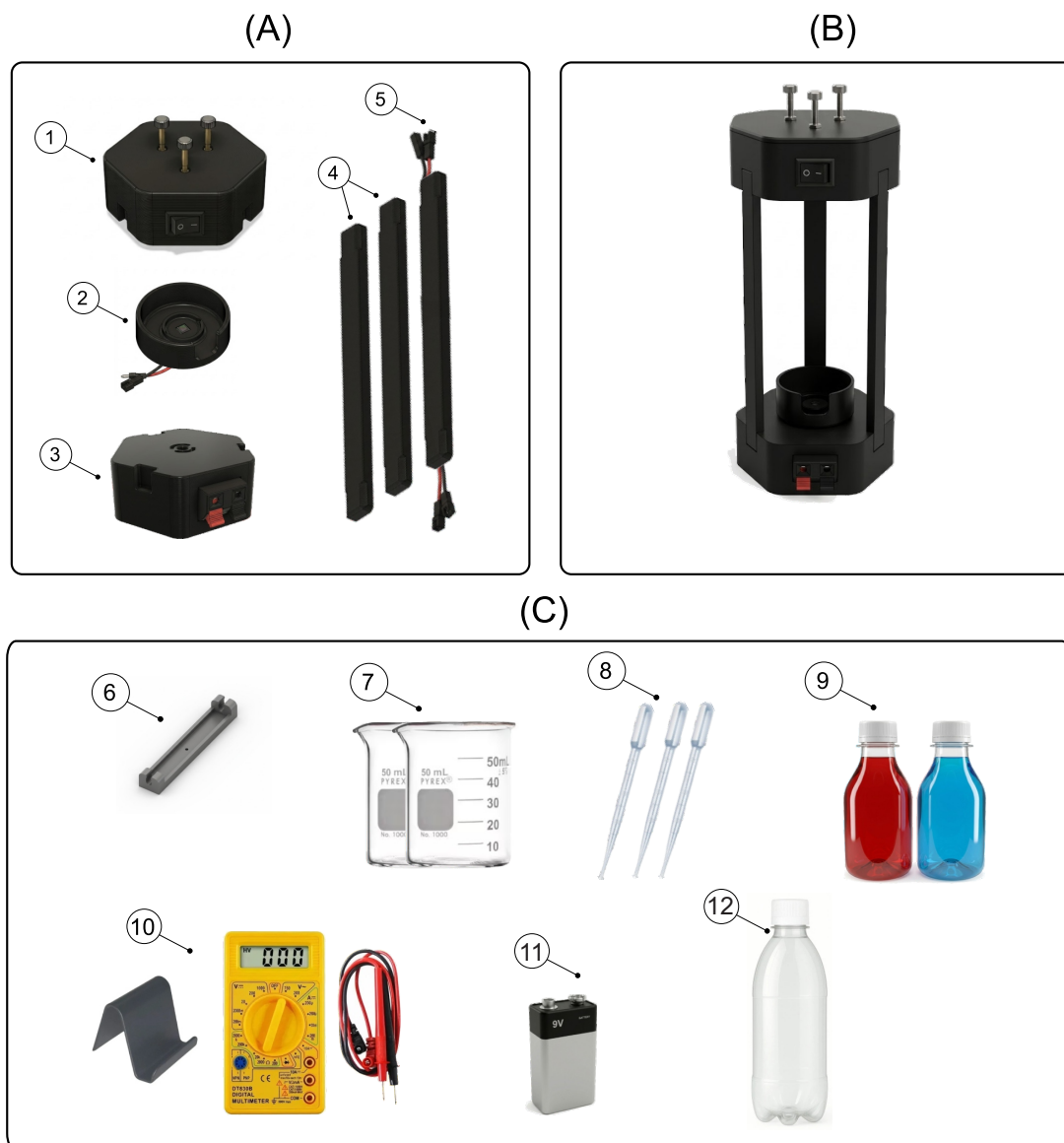


Figura 1: Componentes do kit experimental para conferência e identificação.

1. Módulo superior: diodo laser vermelho, comprimento de onda nominal de 650 nm e potência de 5 mW, alinhador de feixe e chave liga/desliga.
2. Acoplador circular: sensor fotodiodo e suporte para bquer.
3. Módulo inferior: regulador de tensão calibrado para 5 V, compartimento para bateria de 9 V e bornes conectores.
4. Duas hastes de sustentação.
5. Uma haste de sustentação com cabos para conexões.
6. Clipes de travamento para jumpers (10 unidades).

7. Dois béqueres de vidro de 50 mL com graduação de 10 mL a 50 mL.
 8. Três pipetas plásticas de capacidade 3 mL e subdivisões de 0,5 mL.
 9. Duas amostras líquidas (azul e vermelho).
 10. Um multímetro digital com pontas de prova e suporte.
 11. Uma bateria de 9 V.
 12. Um frasco vazio para descarte de amostras (500ml).
-

Diagrama Esquemático

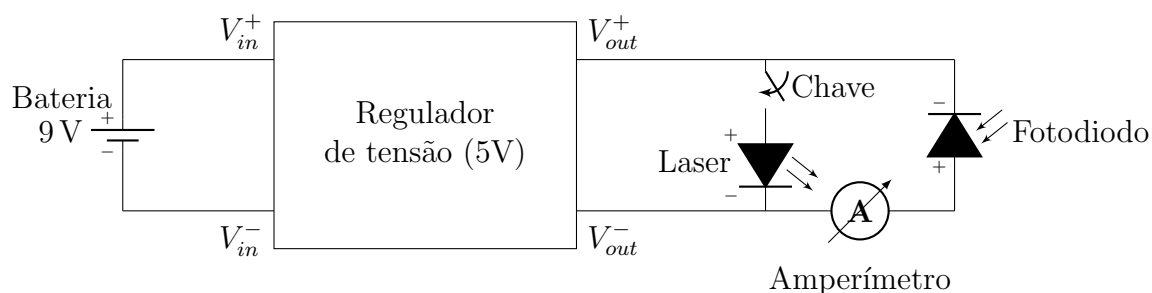


Figura 2: Diagrama esquemático do circuito elétrico do kit: bateria 9 V, regulador 5 V, fotodiodo em polarização (indicada), diodo laser e multímetro em série para medição de corrente.

Tabela 1: Pares de cores para as conexões elétricas VCC (+) e GND (-) dos componentes eletrônicos.

VCC (+)		GND (-)	
Vermelho	●	Preto	●
Amarelo	●	Azul	●
Laranja	●	Verde	●
Branco	○	Marrom	●
Cinza	●	Roxo	●

Guia de conexões

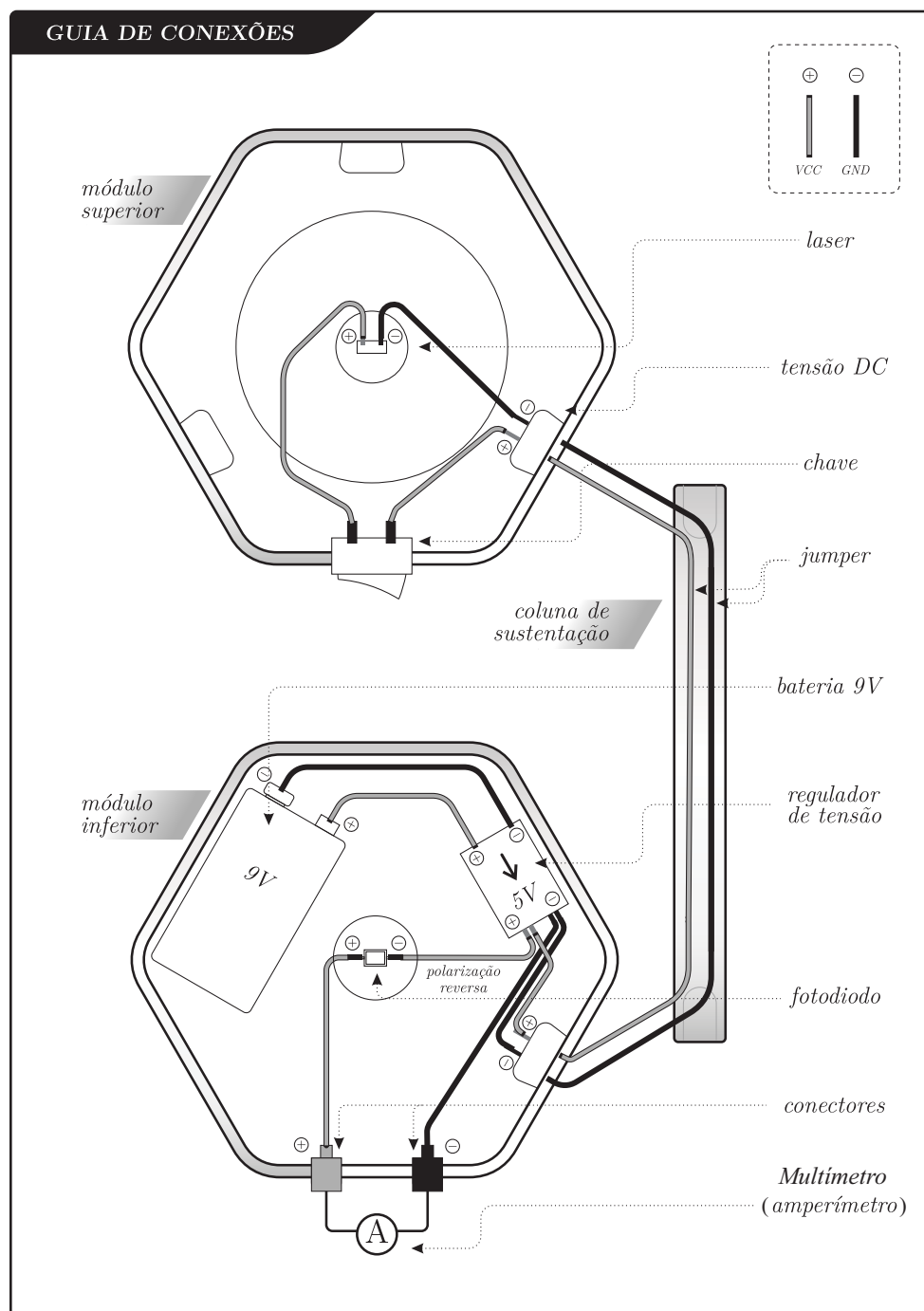


Figura 3: Figura representativa das conexões e montagem dos módulos do kit.

Notas técnicas e instruções iniciais

- Verifique a presença de todos os itens listados e anote o RID do kit no espaço reservado. Caso falte algum componente, solicite reposição imediatamente.
- Considere o béquer de 50 mL como um cilindro de diâmetro

$$D = 39,80 \text{ mm}$$

e incerteza

$$\Delta D = 0,02 \text{ mm.}$$

- Verifique se a região do trajeto do feixe e a superfície do fotodiodo estão livres de poeira e respingos antes de realizar as séries de medições.
- Para converter o volume de líquido contido no béquer (medido em mL) em altura h (espessura da amostra atravessada pelo feixe em cm), use a fórmula do volume do cilindro, considerando que $1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$.
- Use as constantes físicas quando necessário:

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J s} \quad (\text{Constante de Planck})$$

$$e = 1,602176634 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (\text{Carga elementar})$$

$$c = 2,9979 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (\text{Velocidade da luz no vácuo})$$

- elétron-Volts (eV) para Joules (J):

$$1 \text{ eV} = 1,602176634 \times 10^{-19} \text{ J}$$

- Joules (J) para elétron-Volts (eV):

$$1 \text{ J} = 6,241509 \times 10^{18} \text{ eV}$$

- Para os cálculos matemáticos, considere o valor de $\pi = 3,14$.
- **Conexões elétricas — jumpers e segurança das ligações:** As conexões entre os componentes eletroeletrônicos devem respeitar as polaridades indicadas pela cor dos cabos mostradas na Tabela 1.

Os componentes eletrônicos do kit (bateria, regulador, fotodiodo, laser, bornes) devem ser conectados por meio de jumpers em cada conector/componente. O estudante é responsável por verificar, antes de qualquer medição, que todos os jumpers estão firmemente encaixados e que não há fios soltos.

Durante a montagem e manipulações, assegure-se que não existam tensões mecânicas que possam deslocar os jumpers. Caso os jumpers apresentem **desconexões involuntárias**, use os **clipes de travamento** para manter as conexões fixadas. Desconexões intermitentes comprometem leituras e podem danificar componentes.

Qualquer jumper com aspecto oxidado, resquício de estanho mal soldado ou com isolamento comprometida deve ser comunicado aos fiscais de prova.

- **Incerteza do multímetro** : Para calcular a incerteza da medição de corrente usa-se o (Quadro 1) a seguir:

Quadro 1: Especificações de Corrente Contínua

ESCALA	RESOLUÇÃO (D)	PRECISÃO
2000 μA	1 μA	$\pm(2,0\% \text{ da leitura} + 10 \text{ D})$
20 mA	10 μA	$\pm(2,0\% \text{ da leitura} + 10 \text{ D})$
200 mA	100 μA	$\pm(2,0\% \text{ da leitura} + 10 \text{ D})$

O parâmetro D é a resolução do multímetro na função amperímetro para corrente contínua.

A precisão é o erro sistemático residual total associado ao instrumento.

Quando se lê $(2\% + 10D)$, significa que esse erro é constituído da soma de 2% da leitura mostrada no display com o décuplo da resolução. Por exemplo, digamos que a leitura foi 4,58 mA na faixa de 20 mA, dessa forma o erro total associado ao instrumento será

$$\sigma_{total} = \frac{2}{100} \cdot (4,58\text{mA}) + 10 \cdot (0,01\text{mA}) = 0,0916 + 0,1$$
$$\sigma_{total} = 0,1916 \approx 0,20 \text{ mA}$$

Dessa forma, a indicação da corrente, **somente** com o erro associado ao instrumento digital, é dada por

$$I = (4,58 \pm 0,20) \text{ mA}$$

Questões da prova

Avaliação total: 40 pontos. A distribuição de pontos indicada em cada item está associada às sub-respostas esperadas. Responda com clareza, mostrando cálculos, gráficos e justificativas.

Coeficiente de atenuação óptica: conceito, significado físico e obtenção experimental

O coeficiente de atenuação óptica (α) é a grandeza que quantifica a perda de intensidade de um feixe luminoso por unidade de comprimento quando este atravessa um meio material. Fisicamente, essa perda resulta de dois processos principais: absorção, em que a energia do campo eletromagnético é transferida para graus de liberdade do material (transições eletrônicas, vibrações, processos térmicos), e espalhamento, em que a energia é desviada do feixe direto por irregularidades, partículas ou flutuações do índice de refração. O coeficiente de atenuação é uma medida macroscópica, que leva em conta como as contribuições eficazes desses processos, removem energia luminosa do feixe por unidade de comprimento.

Para se obter o coeficiente a partir de medições experimentais, obtém-se uma série de leituras da intensidade detectada (corrente elétrica, I , no fotodetector, após correções de **offset**²) para diferentes espessuras (h) da amostra. A partir dessa família de pares (I, h), procede-se a um ajuste de modelo que descreva a redução da intensidade com o comprimento do trajeto óptico; ao transformar adequadamente os dados (por exemplo, por uma transformação logarítmica quando aplicável), obtém-se uma relação linear entre a variável transformada da intensidade e altura. A inclinação dessa reta, obtida por regressão adequada (preferencialmente ponderada pelos erros nas medições), fornece diretamente o valor numérico do coeficiente de atenuação e sua incerteza associada.

²*Offset* é um deslocamento sistemático do valor medido em relação ao zero verdadeiro do instrumento ou do sistema de medição. Ele aparece como um termo aditivo constante que não depende da grandeza física de interesse e deve ser identificado e corrigido para evitar resultados tendenciosos. No contexto da prova, *offset* corresponde principalmente à corrente medida pelo fotodiodo na ausência de sinal óptico útil, isto é, a contribuição de corrente escura (*dark current*), ruído eletrônico e possíveis correntes parasitas do circuito.

Q1 — Procedimento experimental, aquisição e organização de dados (15 pontos)

Esta primeira questão dirige-se à execução prática do experimento: montagem do aparelho, verificação das conexões, alinhamento do feixe, calibrações iniciais e aquisição sistemática de séries de medidas para amostras puras e misturas. Os resultados obtidos aqui constituirão a base empírica para as análises das questões seguintes.

Registre com cuidado todas as leituras, as condições experimentais e as observações qualitativas que possam afetar a interpretação dos dados. Execute a montagem, calibração e a aquisição de dados conforme indicado. Apresente tabelas, leituras e incertezas e desvio padrão (σ) solicitados.

PARTE A — Montagem e verificação inicial (3,0 pts)

Nesta etapa você realizará a montagem elétrica e mecânica correta do kit efetuando as conexões elétricas entre os componentes eletrônicos de cada módulo (inferior e superior), verificando que os jumpers soldados estejam firmes e que não haja conexões intermitentes. Você juntará os módulos usando as hastes até obter o equipamento mostrado na Figura 1 (B). Após a montagem do kit, você realizará medições de *dark current* para estabelecer os níveis de ruído de fundo que serão usados nas análises posteriores. Em seguida, proceda o alinhamento fino do diodo laser ajustando os três parafusos de alinhamento até obter a maior corrente detectada; registre esse valor da corrente máxima $I_{\text{máx}}$. Em seguida, acrescente o béquer e meça a corrente de referência I_{ref} . A clareza na documentação do procedimento e a estatística básica das leituras são cruciais.

Confirme a presença de todos os itens segundo a Figura 1.

A.1	Anote o seu RID no local indicado no kit experimental.
------------	---

0,1 pt

Solução:

Espera-se: RID anotado no local indicado; checklist (itens 1–12 conforme Figura 1).

Antes de iniciar qualquer ligação elétrica, certifique-se que o interruptor do módulo superior esteja na posição “**desligado**”. Verifique que os **jumpers soldados** aos componentes eletroeletrônicos estejam bem encaixados e seguros.

- Inserir o acoplador circular (item 2. Figura 1A) no módulo inferior (item 3 Figura 1A).
- Insira a bateria de 9 V no compartimento do módulo inferior (Figura 3), certificando-se da polaridade correta.
- Instale o regulador de tensão no módulo inferior (Figura 3) para fornecer alimentação estável para o circuito.
- Conecte as hastes de sustentação unindo o módulo superior com o módulo inferior. Use a haste com cabos (jumpers) para realizar a conexão elétrica entre os módulos, respeitando as polaridades (Tabela 1).
- Para medir a corrente, conecte as pontas de prova do multímetro aos bornes do módulo inferior (Figura 3), e selecione a escala adequada do multímetro.

- Use os cliques de travamento (item 6, Figura. 1C.) para fixar as conexões entre os jumpers, conforme a polaridade indicada no guia de conexões.

A.2 Monte o aparelho conforme o guia de conexões (Figura 3). Use e o código de cores (Tabela 1) como guia para a polaridade das conexões elétricas. 0,9 pt

Solução:

Espera-se: circuito montado seguindo Fig.3 e Tabela 1; polaridades respeitadas; jumpers travados; multímetro em série para corrente.

Se o estudante montou o kit corretamente conseguirá desenvolver a aquisição de dados das questões A3, A4. Sendo assim, a questão é validada.

Um erro comum é que, embora o laser forneça um feixe intenso, se a conexão do fotodiodo estiver no modo polarização direta, a corrente lida no multímetro é praticamente zero.

A.3 Meça e anote a *dark current* (laser desligado) considerando 3 leituras $I_{\text{dark},i}$ (para $i=1,2,3$). Forneça a média $\bar{I}_{\text{dark}}$ e desvio padrão σ_{dark} . 0,75 pt

Solução:

Na menor escala do multímetro o valor deverá ser menor que $5 \mu\text{A}$.

Tabela S1: Medidas de *Dark Current*

	$I_{\text{dark},1}$	$I_{\text{dark},2}$	$I_{\text{dark},3}$	$\bar{I}_{\text{dark}}$	σ_{dark}
Valor (μA)	1	1	1	1	0

- Três leituras $I_{\text{dark},i}$ (unidades μA ou mA conforme escala), média $\bar{I}_{\text{dark}}$ e desvio padrão amostral s_{dark} usando

$$\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2}.$$

Cálculos:

- Média: $\bar{I}_{\text{dark}} = \frac{1+1+1}{3} = 1 \mu\text{A}$
- Desvio Padrão: $\sigma_{\text{dark}} = \sqrt{\frac{3 \times (1-1)^2}{2}} = 0 \mu\text{A}$

Ligue o laser acionando o interruptor localizado no módulo superior sem amostra no porta-amostra.

- A.4** Alinhe mecanicamente o diodo laser de modo que toda a área do feixe incida sobre a área do fotodiodo. Para atingir a corrente máxima medida pelo multímetro, ajuste adequadamente os três parafusos de alinhamento localizados no módulo superior. 0,5 pt
- Espere 10 minutos para atingir a estabilização térmica/eletro-óptica do laser e meça $I_{\text{máx}}$ com o béquer fora do porta-amostras e registre o valor com sua incerteza, indicando a escala do multímetro utilizada.

- Após atingida a estabilização, **NÃO DESLIGUE** e **não** altere mais o alinhamento do laser, pois seus resultados podem ficar comprometidos.

Solução:**Passos obrigatórios apresentados pelo estudante:**

1. Indicação da escala do multímetro usada ($2000\ \mu\text{A}$, $20\ \text{mA}$, etc.). Isso é essencial porque a expressão do erro depende da escala — tabela do anexo (pág. G-7).
2. Valor numérico de $I_{\text{máx}}$ com unidade (mA ou μA).
3. Cálculo da incerteza instrumental, σ_{instr} escolhendo a expressão correta da tabela em anexo (pág. G-7)
4. Apresentar $I_{\text{máx}} \pm \sigma_{\text{total}}$ com número de algarismos coerente.

Exemplo numérico: Leitura: $I_{\text{máx}} = 2,23\ \text{mA}$, Escala: $20\ \text{mA}$

$$\text{Erro percentual: } 2,23 \times 2/100 = 0,0446\ \text{mA}$$

$$\text{Erro dos dígitos: } \text{Resolução} = 0,01\ \text{mA} \implies 10 \times 0,01 = 0,10\ \text{mA}$$

$$\text{Incerteza Total } (\delta I) : 0,0446 + 0,10 = \mathbf{0,1446\ \text{mA}}$$

Apresentação final da medida com o número de algarismos corretos:

$$I_{\text{máx}} = (2,23 \pm 0,14)\ \text{mA}$$

- Coloque o béquer vazio no porta-amostra.

- A.5** Meça e anote três leituras de corrente de referência I_{ref} , na condição do **laser ligado** e com o béquer vazio sobre o porta-amostra. Calcule a média $\bar{I}_{\text{ref}}$ e o desvio padrão σ_{ref} . 0,75 pt

Solução:

Espera-se: três leituras de $I_{\text{ref}} < I_{\text{máx}}$ com laser ligado e o béquer vazio inserido no porta-amostras; cálculo de média e desvio padrão amostral (mesmas fórmulas de A.3).

Tabela S2: Medidas de corrente de referência

	$I_{\text{ref},1}$	$I_{\text{ref},2}$	$I_{\text{ref},3}$	$\bar{I}_{\text{ref}}$	σ_{ref}
Valor (mA)	2,10	2,11	2,11	2,11	0,00

As medidas obtidas foram 2,11, 2,11 e 2,10.

A média aritmética é dada por

$$\bar{I}_{\text{ref}} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 I_i = 2,1067 \approx 2,11. \quad (1)$$

O desvio padrão populacional é

$$\sigma_{\text{ref}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^N (I_i - \bar{I})^2} = 0,0057735 \approx 0,006. \quad (2)$$

Segundo as regras de algarismos significativos, o valor médio deve ser expresso com o mesmo número de casas decimais da resolução do instrumento. Assim, o resultado é

$$\boxed{(2,11 \pm 0,01) \text{ mA}} \quad (3)$$

PARTE B — Aquisição de medidas para amostras individuais (5,5 pts.)

Colete uma série de medidas repetidas de corrente para cada volume experimental e converta os volumes medidos em mL para alturas h em unidades de comprimento (cm ou mm) com a propagação adequada das incertezas. Organize os dados em tabelas completas contendo leituras repetidas, médias e desvios padrão. A precisão na conversão volume-altura e na estimativa das incertezas instrumentais é requisito para que as regressões e comparações subsequentes sejam válidas.

Para cada amostra individual (vermelha e azul), realize medidas de corrente para os volumes

$$V = (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50) \text{ mL}.$$

Para cada volume, realize três leituras independentes de corrente, separadas por tempos ≥ 5 s.

- | | | |
|------------|---|--------|
| B.1 | Determine a altura h (em mm) equivalente ao volume de líquido V (em mL) contido no béquer, utilizando a área da seção transversal A . Considere o recipiente como um cilindro de diâmetro $D = 39,80$ mm e expresse o resultado com o número correto de algarismos significativos. Considerando a incerteza de volume $\Delta V = 2,5$ mL (graduação/manuseio). Propague a incerteza de D ($\Delta D = 0,02$ mm) para obter ΔA e, consequentemente, Δh . (Assuma que V e A são variáveis independentes). | 1,5 pt |
|------------|---|--------|

Solução:

A equivalência entre mililitros e centímetros cúbicos é dada por:

$$1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3. \quad (4)$$

Cálculo da Área

O diâmetro do círculo é:

$$D = 39,8 \text{ mm}, \quad (5)$$

e o raio correspondente é:

$$r = \frac{D}{2} = 19,9 \text{ mm}. \quad (6)$$

A área do círculo é então:

$$A = \pi r^2 = \pi(19,9)^2 \approx 1244,1 \text{ mm}^2. \quad (7)$$

Altura Equivalente

A altura equivalente h é obtida pela razão entre o volume V e a área A :

$$h = \frac{V}{A}. \quad (8)$$

Incerteza da Altura Equivalente

A altura equivalente é definida como

$$h(\text{cm}) = \frac{V(\text{cm}^3)}{A(\text{cm}^2)}. \quad (9)$$

Convertendo para milímetros, obtém-se:

$$h(\text{mm}) = 10 h(\text{cm}) = \frac{10V}{A}. \quad (10)$$

Propagação de Incertezas

Incerteza da área:

$$\Delta A = \left| \frac{dA}{dD} \right| \Delta D = \frac{\pi D}{2} \Delta D = 2\pi r \Delta r \quad (11)$$

Assumindo que o volume V e a área A são variáveis independentes, a propagação de incertezas fornece:

$$\left(\frac{\Delta h}{h} \right)^2 = \left(\frac{\Delta V}{V} \right)^2 + \left(\frac{\Delta A}{A} \right)^2. \quad (12)$$

Exemplo Numérico

Considerando:

$$V = 5,00 \text{ mL}, \quad \Delta V = 2,5 \text{ mL}, \quad (13)$$

$$A = 12,441 \text{ cm}^2, \quad \Delta A = 1,250 \times 10^{-2} \text{ cm}^2 \quad (14)$$

tem-se para a altura:

$$h = \frac{10 \times 5,00}{12,441} \approx 4,019 \text{ mm}. \quad (15)$$

As incertezas relativas são:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{2,5}{5,00} = 0,5, \quad (16)$$

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{1,250 \times 10^{-2}}{12,441} \approx 1,005 \times 10^{-3}, \quad (17)$$

sendo esta última muito menor que a incerteza relativa do volume.

Assim, a incerteza da altura é:

$$\Delta h \approx 4,019 \sqrt{(0,5)^2 + (1,005 \times 10^{-3})^2} \approx 4,019 \times 0,500 \approx 2,010 \text{ mm}. \quad (18)$$

Portanto, o resultado pode ser expresso como:

$$h = (4,0 \pm 2,0) \text{ mm}, \quad (19)$$

ou arredondado conforme as regras de algarismos significativos.

Observação: note que $\Delta V/V$ domina aqui; portanto exigir o cálculo completo, mas aceitar que $\Delta A/A$ seja desprezível numericamente (desde que mostrado).

B.2	Construa uma tabela com os dados de Volume (mL), Altura h (mm ou cm), correntes (I_1 , I_2 , I_3), valor médio da corrente $\bar{I}$ (mA) e incerteza (desvio padrão) σ_I para a amostra Azul.	2,0 pt
------------	---	--------

Solução:

$$I_{\text{ref}} = 1,92 \text{ mA}$$

O resultado de Q1-B.1 indica que a incerteza da altura é de $\approx 2 \text{ mm}$ (praticamente a metade do primeiro volume medido), manter três casas decimais passa uma falsa impressão de precisão. Por tanto, arredondamos a altura para que ela termine na mesma casa decimal que a incerteza, nesse caso, para o número inteiro mais próximo.

A tabela para a amostra azul para uma $I_{\text{ref}}=1,92 \text{ mA}$ é a seguinte:

Tabela S3: Medidas Amostra Azul

Vol (mL)	h (cm)	I_1	I_2	I_3	$\bar{I}_{\text{méd}}$	$\sigma_{\text{méd}}$
5	0,4	1,44	1,43	1,44	1,44	0,01
10	0,8	1,08	1,08	1,07	1,08	0,01
15	1,2	0,73	0,73	0,73	0,73	0,00
20	1,6	0,54	0,55	0,54	0,54	0,01
25	2,0	0,41	0,42	0,41	0,41	0,01
30	2,4	0,31	0,30	0,31	0,31	0,01
35	2,8	0,24	0,23	0,24	0,24	0,01
40	3,2	0,16	0,17	0,16	0,16	0,01
45	3,6	0,12	0,13	0,13	0,13	0,01
50	4,0	0,08	0,09	0,08	0,08	0,01

Fórmulas a serem usadas pelo aluno:

$$\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} I_i, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2}$$

Se o aluno apresenta s e não $\sigma_{\bar{I}}$, pedir que relacione: $\sigma_{\bar{I}} = s/\sqrt{n}$ quando for relevante usar incerteza da média.

Exemplo (linha 1, Amostra Azul, Tabela S3 — dados: $I_1 = 1,44$, $I_2 = 1,43$, $I_3 = 1,44$ mA):

- $\bar{I} = (1,44 + 1,43 + 1,44)/3 = 1,4367$ mA $\rightarrow$ arredondamos para 1,44 mA conforme regra de algarismos.
- $\sigma = \sqrt{\frac{(1,44-1,4367)^2 + (1,43-1,4367)^2 + (1,44-1,4367)^2}{2}} \approx 0,0057735$ mA. Na tabela (Tabela S3) escrever como 0,01 mA por arredondamento.

Os valores para as linhas seguintes podem ser calculados de maneira similar (usando as fórmulas para $\bar{I}$ e σ).

B.3 Construa uma tabela com os dados de Volume (mL), Altura h (mm ou cm), correntes (I_1 , I_2 , I_3), corrente média $\bar{I}$ (mA) e incerteza (desvio padrão) σ_I para a amostra vermelha. 2,0pt

Solução:

$I_{\text{ref}} = 2,12$ mA

Tabela S4: Medidas Amostra Vermelha

Vol (mL)	h (cm)	I_1	I_2	I_3	$\bar{I}_{\text{méd}}$	$\sigma_{\text{méd}}$
5	0,4	2,08	2,06	2,07	2,07	0,01
10	0,8	2,06	2,07	2,06	2,06	0,01
15	1,2	2,04	2,03	2,05	2,04	0,01
20	1,6	2,01	2,02	2,01	2,01	0,01
25	2,0	1,98	1,99	1,98	1,98	0,01
30	2,4	1,95	1,96	1,94	1,95	0,01
35	2,8	1,93	1,94	1,92	1,93	0,01
40	3,2	1,90	1,92	1,91	1,91	0,01
45	3,6	1,89	1,88	1,89	1,89	0,01
50	4,0	1,86	1,85	1,84	1,85	0,01

Fórmulas a serem usadas pelo aluno:

$$\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2}$$

Se o aluno apresenta s e não $\sigma_{\bar{I}}$, pedir que relacione: $\sigma_{\bar{I}} = s/\sqrt{n}$ quando for relevante usar incerteza da média.

Exemplo (linha 1, Amostra vermelha, Tabela S4 — dados: $I_1 = 2,08$, $I_2 = 2,06$, $I_3 = 2,07$ mA):

- $\bar{I} = (2,08 + 2,06 + 2,07)/3 = 2,07$ mA $\rightarrow$, já arredondado para duas casas decimais.
- $\sigma = \sqrt{\frac{(2,08-2,07)^2 + (2,06-2,07)^2 + (2,07-2,07)^2}{2}} = 0,01$ mA.

Os valores para as linhas seguintes podem ser calculadas de maneira similar (usando as fórmulas para $\bar{I}$ e σ).

PARTE C — Medidas em misturas (6,5 pts.)

Prepare as misturas volumétricas conforme as instruções abaixo e proceda à aquisição de dados análoga à das amostras puras (Q1- PARTE B). Fique atento a quaisquer fenômenos observáveis (opacidade, bolhas, mudança de cor, etc.). Ao concluir todas as medições, repita a leitura do *dark current* para confirmar se o valor de fundo permaneceu estável. Qualquer diferença significativa entre o *dark current* inicial e o final indica **deriva**³, ou seja, uma alteração lenta e indesejada no comportamento elétrico do detector durante o experimento.

³**Verificar deriva** significa confirmar se um parâmetro medido, que teoricamente deveria permanecer estável,

Procedimento (ordem obrigatória)

- **Preparação sequencial da mistura:** Você deverá preparar uma sequência de misturas:

$$M1 = 10 \text{ mL azul} + 40 \text{ mL vermelho}$$
$$M2 = 20 \text{ mL azul} + 30 \text{ mL vermelho}$$
$$M3 = 30 \text{ mL azul} + 20 \text{ mL vermelho}$$
$$M4 = 40 \text{ mL azul} + 10 \text{ mL vermelho}$$
Observação importante

Não prepare as outras misturas antes de finalizar todo o procedimento para a mistura em análise.

- **Exemplo de sequência:** preparar M1 → medir M1 completamente → descartar M1 → limpar o béquer → preparar M2 → medir M2, etc.

Aquisição de dados para a mistura preparada

Para a mistura preparada (exemplo, M1), proceda exatamente como em Q1- PARTES B2 e B3:

- Varra os volumes:

$$V = (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50) \text{ mL}$$

no béquer.

- **Para cada volume, faça três leituras independentes de corrente, separadas por pelo menos 5 s.**

Descarte e limpeza imediata

Ao concluir todas as leituras para a mistura analisada (exemplo, M1):

- Descarte a mistura no recipiente para descarte fornecido.
- Lave o béquer utilizado com água para remover os resíduos.
- Seque o béquer com o material fornecido antes de reutilizá-lo.
- Verifique visualmente que não restaram gotas que possam contaminar a próxima mistura.

C.1	Prepare, em sequência, as misturas indicadas (M1 e M2). Para cada uma das misturas preparadas, registre fenômenos observáveis (opacidade, bolhas, mudança de cor) e proceda à aquisição de dados seguindo o procedimento indicado como em Q1 PARTE B2. Durante a aquisição de dados, registre também quaisquer fenômenos visíveis (bolhas, opacidade, flutuação de cor, sedimentação, etc.) e faça anotações sobre estabilidade do sinal (flutuações, picos).	3,0 pt
------------	---	--------

sofreu uma mudança lenta e indesejada ao longo do experimento.

Solução:

Amostra M1: verificamos uma mudança de coloração, se aproximando de uma cor vinho.

$$I_{\text{ref}} = 2 \text{ mA}$$

Tabela S5: Medidas para M1

Vol (mL)	h (cm)	I_1	I_2	I_3	$\bar{I}_{\text{méd}}$	$\sigma_{\text{méd}}$
5	0,4	1,86	1,85	1,86	1,86	0,01
10	0,8	1,71	1,71	1,70	1,71	0,01
15	1,2	1,57	1,58	1,57	1,57	0,01
20	1,6	1,44	1,45	1,46	1,45	0,01
25	2,0	1,31	1,30	1,32	1,31	0,01
30	2,4	1,21	1,20	1,20	1,20	0,01
35	2,8	1,12	1,11	1,10	1,11	0,01
40	3,2	1,03	1,02	1,01	1,02	0,01
45	3,6	0,93	0,94	0,94	0,94	0,01
50	4,0	0,83	0,82	0,83	0,83	0,01

Fórmulas a serem usadas pelo aluno:

$$\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2}$$

Se o aluno apresenta s e não $\sigma_{\bar{I}}$, pedir que relacione: $\sigma_{\bar{I}} = s/\sqrt{n}$ quando for relevante usar incerteza da média.

Exemplo (linha 1, Amostra M1, Tabela S5 — dados: $I_1 = 1,86$, $I_2 = 1,85$, $I_3 = 1,86$ mA):

- $\bar{I} = (1,86 + 1,85 + 1,86)/3 \approx 1,86$ mA $\rightarrow$, arredondado para duas casas decimais.
- $\sigma = \sqrt{\frac{(1,86-1,86)^2 + (1,85-1,86)^2 + (1,86-1,86)^2}{2}} = 0,0057735 \approx 0,01$ mA.

Os valores para as linhas seguintes podem ser calculadas de maneira similar (usando as fórmulas para $\bar{I}$ e σ).

Amostra M2: verificamos uma mudança de coloração, se aproximando de uma cor Violeta. A corrente máxima permaneceu sem flutuação.

$$I_{\text{ref}} = 1,67 \text{ mA}$$

Tabela S6: Medidas para M2

Vol (mL)	h (cm)	I_1	I_2	I_3	$\bar{I}_{\text{méd}}$	$\sigma_{\text{méd}}$
5	0,4	1,48	1,48	1,48	1,48	0,00
10	0,8	1,29	1,30	1,30	1,30	0,01
15	1,2	1,13	1,13	1,13	1,13	0,00
20	1,6	0,98	0,99	0,97	0,98	0,01
25	2,0	0,85	0,85	0,85	0,85	0,00
30	2,4	0,74	0,73	0,74	0,74	0,01
35	2,8	0,65	0,65	0,65	0,65	0,00
40	3,2	0,55	0,54	0,56	0,55	0,01
45	3,6	0,49	0,50	0,50	0,50	0,01
50	4,0	0,42	0,41	0,42	0,42	0,01

Fórmulas a serem usadas pelo aluno:

$$\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2}$$

Se o aluno apresenta s e não $\sigma_{\bar{I}}$, pedir que relacione: $\sigma_{\bar{I}} = s/\sqrt{n}$ quando for relevante usar incerteza da média.

Exemplo (linha 1, Amostra M2, Tabela S6 — dados: $I_1 = 1,48$, $I_2 = 1,48$, $I_3 = 1,48$ mA):

- $\bar{I} = (1,48 + 1,48 + 1,48)/3 = 1,48$ mA $\rightarrow$ valor exato com duas casas decimais.
- $\sigma = \sqrt{\frac{(1,48-1,48)^2 + (1,48-1,48)^2 + (1,48-1,48)^2}{2}} = 0,00$ mA.

Os valores para as linhas seguintes podem ser calculadas de maneira similar (usando as fórmulas para $\bar{I}$ e σ).

- | | | |
|------------|--|--------|
| C.2 | Prepare, em sequência, as misturas seguintes (M3 e M4). Para cada mistura preparada, registre fenômenos observáveis (opacidade, bolhas, mudança de cor) e proceda exatamente como em Q1 PARTE B2. Durante a aquisição, observe e registre quaisquer fenômenos visíveis (bolhas, opacidade, flutuação de cor, sedimentação, etc.) e faça anotações sobre a estabilidade do sinal (flutuações, picos). | 3,0 pt |
|------------|--|--------|

Solução:

Amostra M3: Verificamos uma mudança de coloração, se aproximando de uma Violeta-claro. Ocorreu queda na corrente máxima. Presença de bolhas.

$$I_{\text{ref}} = 1,68 \text{ mA}$$

Tabela S7: Medidas para M3

Vol (mL)	h (cm)	I_1	I_2	I_3	$\bar{I}_{\text{méd}}$	$\sigma_{\text{méd}}$
5	0,4	1,44	1,45	1,44	1,44	0,01
10	0,8	1,21	1,21	1,21	1,21	0,00
15	1,2	0,96	0,96	0,96	0,96	0,00
20	1,6	0,80	0,81	0,80	0,80	0,01
25	2,0	0,67	0,67	0,67	0,67	0,00
30	2,4	0,53	0,54	0,54	0,54	0,01
35	2,8	0,45	0,45	0,45	0,45	0,00
40	3,2	0,37	0,36	0,36	0,36	0,01
45	3,6	0,31	0,30	0,31	0,31	0,01
50	4,0	0,25	0,25	0,26	0,25	0,01

- Calculamos a média e o desvio padrão da média seguindo o procedimento das amostras anteriores, M1, por exemplo.

Amostra M4: verificamos uma mudança de coloração, se aproximando de uma cor azul anil. Ocorreu queda na corrente máxima. Presença de bolhas.

$$I_{\text{ref}} = 1,92 \text{ mA}$$

Tabela S8: Medidas para M4

Vol (mL)	h (cm)	I_1	I_2	I_3	$\bar{I}_{\text{méd}}$	$\sigma_{\text{méd}}$
5	0,4	1,60	1,59	1,60	1,60	0,01
10	0,8	1,25	1,23	1,24	1,24	0,01
15	1,2	0,90	0,88	0,90	0,89	0,01
20	1,6	0,72	0,71	0,72	0,72	0,01
25	2,0	0,57	0,56	0,57	0,57	0,01
30	2,4	0,44	0,43	0,44	0,44	0,01
35	2,8	0,36	0,35	0,36	0,36	0,01
40	3,2	0,27	0,27	0,25	0,26	0,01
45	3,6	0,22	0,22	0,22	0,22	0,00
50	4,0	0,16	0,15	0,16	0,16	0,01

- Calculamos a média e o desvio padrão da média seguindo o procedimento das amostras anteriores, M1, por exemplo.

C.3	Verificação de deriva: após descarte e limpeza meça novamente o <i>dark current</i> (3 leituras) e registre a média e o desvio padrão (laser desligado e béquer fora do porta-amostras). Compare com o <i>dark current</i> inicial e anote qualquer variação significativa. Uma mudança observada indica deriva registre.	0,5 pt
------------	--	--------

Solução:

Se o aparelho estiver funcionando corretamente, a corrente (*dark current*), permanecerá inalterada. Nosso caso permaneceu em $1\mu A$. Qualquer mudança drástica no valor da corrente indica que o aparelho sofreu avaria durante a utilização. O Fiscal especializado em eletrônica avaliará as causas do dano.

Os valores aceitáveis de *dark current* são da ordem de dezenas de $5\mu A$, dependendo da iluminação ambiente. Valores superiores implicam a inclusão de um *offset* nos ajustes teóricos.

Q2 — Análise quantitativa dos dados e interpretação (20 pontos)

Com os conjuntos de dados experimentais obtidos em Q1 exige-se que você modele matematicamente a dependência da intensidade de corrente I detectada com a altura, h , e que extraia parâmetros representativos, em particular o coeficiente de atenuação para as amostras puras e as misturas. A rigorosa análise estatística, a apresentação de gráficos com barras de erro e a interpretação física dos parâmetros são partes integrantes da prova.

PARTE A — Modelagem e escolha de modelos teóricos (10,0 pts)

A tarefa aqui é testar diversas hipóteses funcionais que descrevam $I(h)$ e identificar o modelo que melhor representa os dados para cada amostra pura. Além dos modelos linear e de atenuação comumente usados, incentive-se a explorar modelos alternativos (polinomiais, empíricos, etc.), sempre confrontando ajuste e análise de **R-quadrado**⁴(R^2). Faça representações diversas (por exemplo, I vs. h , escala linear e monolog) para visualizar comportamentos, e interprete fisicamente os parâmetros obtidos em cada modelo escolhido.

A.1 Construa dois gráficos (linear e monolog) que permitam identificar a melhor relação entre a corrente medida I e altura h . Para cada amostra individual (vermelha e azul), teste, pelo menos, as seguintes hipóteses de ajuste: 5,0 pt

- **Modelo linear:** $I(h) = I_0(1 - \alpha h)$.
- **Modelo exponencial:** $I(h) = I_0 e^{-\alpha h}$

Realize a comparação individual dos gráficos para as amostras vermelha e azul e indique o modelo mais adequado. Justifique.

Solução:

Q2 — A1: Ajuste dos Modelos Linear e Exponencial (Offset Nulo)**1. Objetivo**

Ajustar os dados experimentais (h_i, I_i) aos dois modelos indicados na questão:

Modelo Linear: $I(h) = I_0(1 - \alpha h)$

Modelo Exponencial: $I(h) = I_0 e^{-\alpha h}$

Assume-se explicitamente:

⁴**R-quadrado** É uma métrica estatística que mede a qualidade do ajuste de um modelo de regressão, mostrando a porcentagem da variação na variável resposta que o modelo consegue explicar, variando de 0 (ajuste ruim) a 1 (ajuste perfeito).

$$\text{offset} = 0 \Rightarrow I(0) = I_0$$

Os ajustes serão realizados por mínimos quadrados não ponderados.

2. Ajuste do Modelo Linear

O modelo pode ser reescrito como:

$$I(h) = A + Bh$$

com

$$A = I_0, \quad B = -I_0\alpha$$

2.1 Estimadores por Mínimos Quadrados

Dados N pares (h_i, I_i) , definem-se:

$$\bar{h} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i, \quad \bar{I} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_i$$

$$S_{hh} = \sum_{i=1}^N (h_i - \bar{h})^2$$

$$S_{hI} = \sum_{i=1}^N (h_i - \bar{h})(I_i - \bar{I})$$

Os coeficientes ajustados são:

$$\hat{B} = \frac{S_{hI}}{S_{hh}}$$

$$\hat{A} = \bar{I} - \hat{B} \bar{h}$$

Logo,

$$\hat{I}_0 = \hat{A}$$

$$\hat{\alpha} = -\frac{\hat{B}}{\hat{A}}$$

2.2 Avaliação do Ajuste

Valores ajustados:

$$\hat{I}_i = \hat{A} + \hat{B}h_i$$

Resíduos:

$$r_i = I_i - \hat{I}_i$$

Soma dos quadrados dos resíduos:

$$\text{SQR}_{\text{lin}} = \sum_{i=1}^N r_i^2$$

Coefficiente de determinação:

$$R_{\text{lin}}^2 = 1 - \frac{\sum (I_i - \hat{I}_i)^2}{\sum (I_i - \bar{I})^2}$$

Observações práticas:

- Este ajuste deve ser usado quando a relação observada I vs h parecer aproximadamente linear.
- As unidades: B tem unidades de (corrente)/(comprimento), A tem unidades de corrente.
- Problemas comuns: se os resíduos mostram estrutura (tendência, curvatura), o modelo linear direto é inadequado.

3. Ajuste do Modelo Exponencial

O modelo é:

$$I(h) = I_0 e^{-\alpha h}$$

Aplicando logaritmo natural:

$$\ln I = \ln I_0 - \alpha h$$

Definindo:

$$y_i = \ln I_i$$

O problema se torna linear:

$$y_i = a + bh_i$$

com

$$a = \ln I_0, \quad b = -\alpha$$

3.1 Estimadores por Mínimos Quadrados

Definem-se:

$$\bar{h} = \frac{1}{N} \sum h_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum y_i$$

$$S_{hh} = \sum (h_i - \bar{h})^2$$

$$S_{hy} = \sum (h_i - \bar{h})(y_i - \bar{y})$$

Os coeficientes ajustados são:

$$\hat{b} = \frac{S_{hy}}{S_{hh}}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{h}$$

Recuperando os parâmetros físicos:

$$\hat{\alpha} = -\hat{b}$$

$$\hat{I}_0 = e^{\hat{a}}$$

3.2 Avaliação do Ajuste

Valores ajustados:

$$\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b}h_i$$

Resíduos no espaço logarítmico:

$$r_i^{(y)} = y_i - \hat{y}_i$$

Soma dos quadrados:

$$\text{SQR}_{\text{exp}} = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Coeficiente de determinação:

$$R_{\text{exp}}^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

4. Comparação dos Modelos

Para decidir qual modelo melhor descreve os dados:

- Compare as somas dos quadrados dos resíduos;
- Compare os valores de R^2 ;
- Analise graficamente os resíduos;
- Verifique coerência física.

Interpretação Física:

- O modelo linear é uma aproximação válida apenas quando $\alpha h \ll 1$.
- O modelo exponencial decorre diretamente da equação diferencial

$$\frac{dI}{dh} = -\alpha I$$

e possui fundamentação física mais robusta.

Análise de resíduos: Gráfico de r_i *vs.* I_i

O que você deve procurar?

✓ Comportamento desejado

- Pontos espalhados aleatoriamente
 - Distribuição aproximadamente simétrica em torno de zero
 - Sem padrão visível
 - Amplitude aproximadamente constante
-

Isso indica que o modelo está adequado.

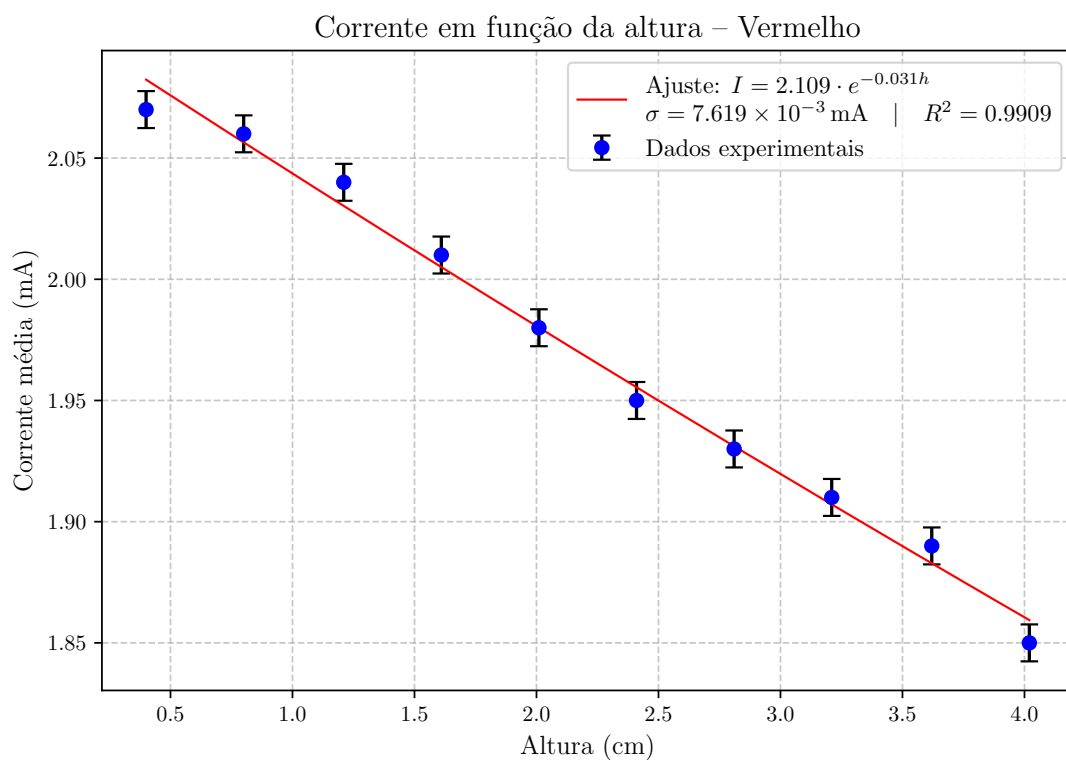


Figura 4: Plot solução vermelha

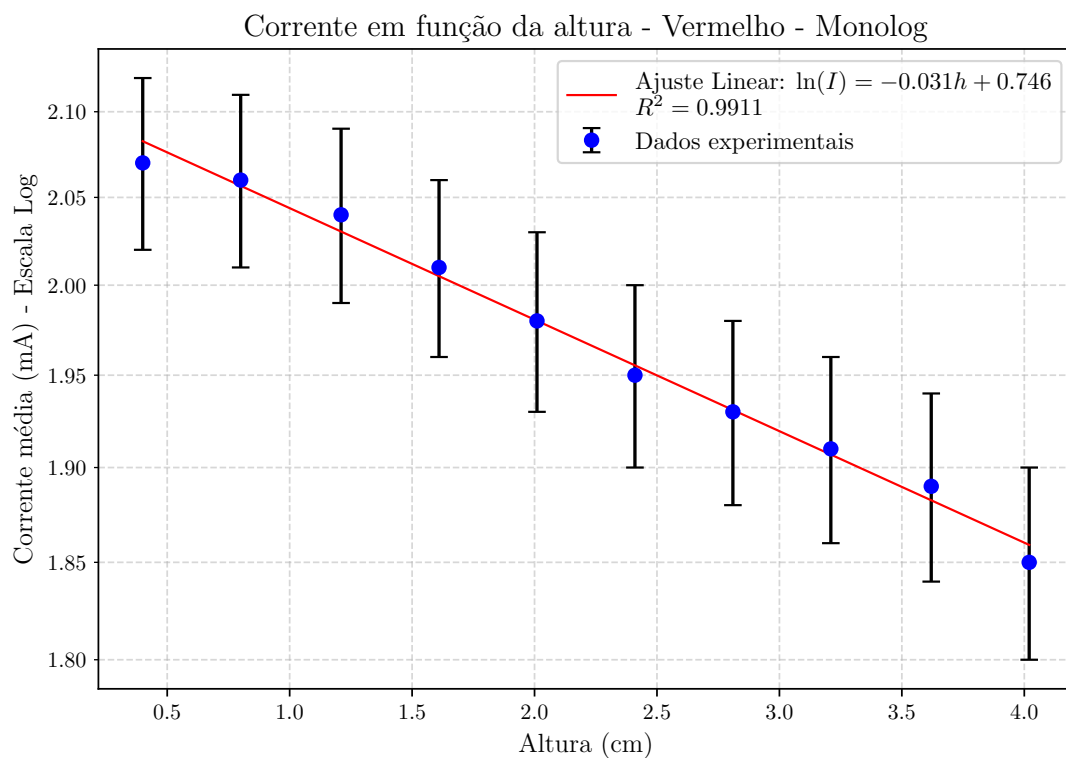


Figura 5: Plot solução vermelha escala monolog

Corrente em função da altura – AZUL
 $I_{\text{ref}} = 1.91 \text{ mA}$

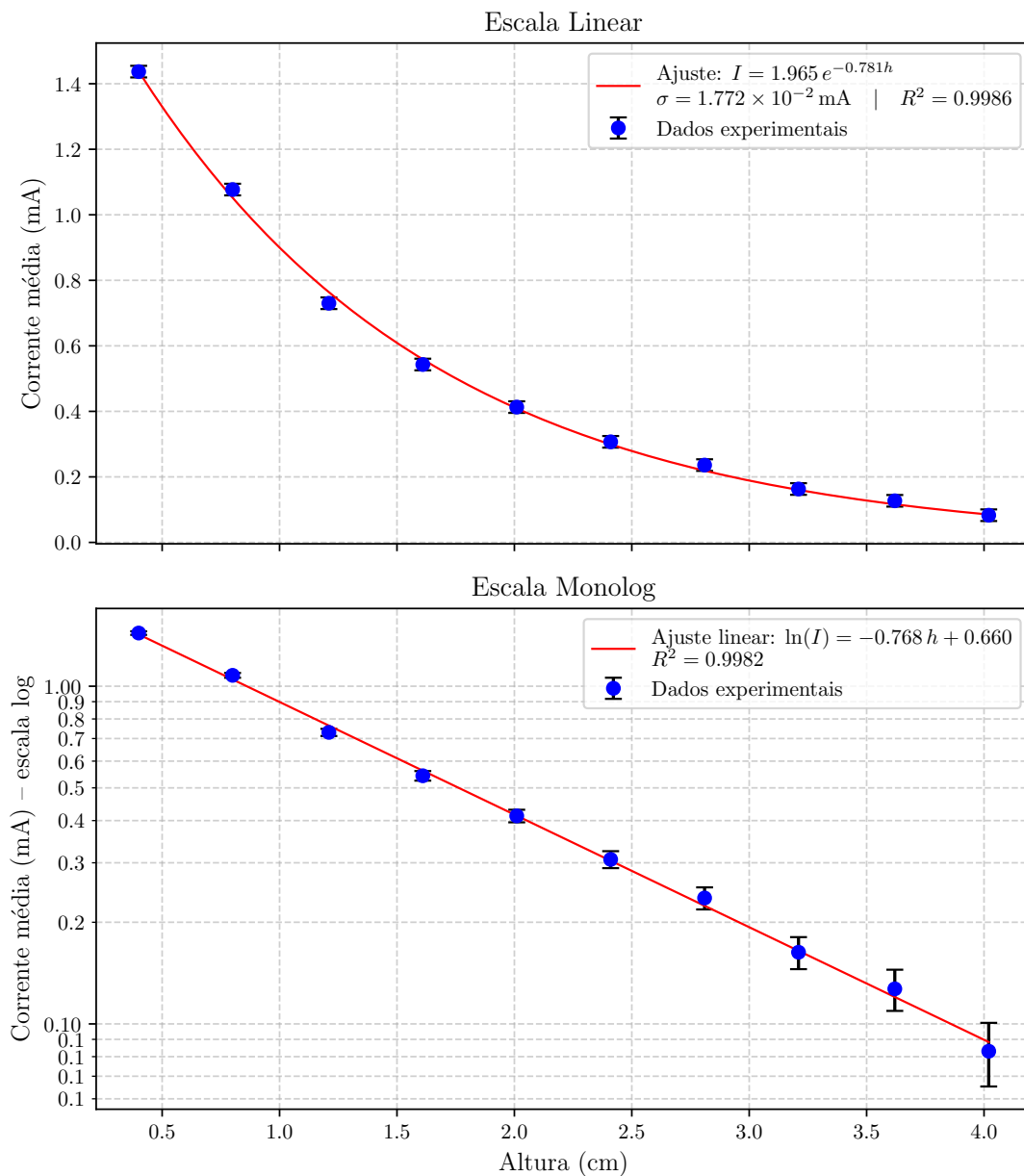


Figura 6: Plot solução azul

A.2

Considerando o modelo teórico que melhor ajusta os dados, determine os parâmetros de ajuste e apresente a correlação R^2 . Inclua uma reta de tendência nos gráficos adequados no item A.1.

4,0 pt

Atenção: Não limite suas hipóteses. Se, a partir da análise de seus resultados, você entender que outros modelos podem descrever seus dados com maior confiabilidade, teste esses modelos matemáticos (por exemplo, polinômios quadrático/cúbico ou modelos empíricos) e compare o

ajuste de todos os modelos testados.

Solução:

Ajuste exponencial — passo a passo (amostras Azul e Vermelha)

A seguir, apresentamos o procedimento completo aplicado aos dados das Tabelas S3 (Azul) e S4 (Vermelha), com todos os somatórios e cálculos numéricos necessários. As alturas h estão em cm e as correntes I em mA. Os passos seguem o método de linearização.

$$y = \ln I = a + b h,$$

com $\alpha = -b$ e $I_0 = e^a$.

Dados usados (extraídos das Tabelas S3 e S4):

índice i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h_i (cm)	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
$I_{\text{azul},i}$ (mA)	1.44	1.08	0.73	0.54	0.41	0.31	0.24	0.16	0.13	0.08
$I_{\text{vermelha},i}$ (mA)	2.07	2.06	2.04	2.01	1.98	1.95	1.93	1.91	1.89	1.85

Nota: os valores acima são as correntes médias $\bar{I}$ já apresentadas nas Tabelas S3 e S4.

1. Ajuste exponencial — Amostra Azul (passo a passo)

1.1 Linearização

$$y_i = \ln(I_{\text{azul},i}).$$

Cálculo numérico (apenas alguns y_i mostrados para referência):

$$y_1 = \ln(1.44) = 0.36464, \quad y_2 = \ln(1.08) = 0.07696, \quad \dots, \quad y_{10} = \ln(0.08) = -2.52573.$$

1.2 Médias

$$\bar{h} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} h_i = 2.2 \text{ cm},$$
$$\bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i \approx -1.0377721123.$$

1.3 Somatórios centrados

$$S_{hh} = \sum_{i=1}^{10} (h_i - \bar{h})^2 = 13.2000,$$

$$S_{hy} = \sum_{i=1}^{10} (h_i - \bar{h})(y_i - \bar{y}) \approx -10.2270696028.$$

1.4 Coeficientes da regressão (linearizada)

$$b = \frac{S_{hy}}{S_{hh}} \approx \frac{-10.2270696}{13.2000} = -0.7747780002,$$

$$a = \bar{y} - b\bar{h} \approx -1.0377721123 - (-0.7747780002)(2.2) = 0.6667394882.$$

1.5 Parâmetros físicos

$$\alpha = -b = 0.7747780002 \text{ cm}^{-1},$$

$$\hat{I}_0 = e^a \approx e^{0.6667394882} = 1.9478758832 \text{ mA}.$$

1.6 Resíduos e variância residual

$$\hat{y}_i = a + bh_i, \quad r_i = y_i - \hat{y}_i.$$

Soma dos quadrados dos resíduos:

$$\sum_{i=1}^{10} r_i^2 \approx 0.0310911969.$$

Variância residual estimada:

$$s^2 = \frac{1}{N-2} \sum r_i^2 = \frac{0.0310911969}{8} \approx 0.0034545774.$$

1.7 Incertezas dos parâmetros

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{s^2}{S_{hh}}} \approx \sqrt{\frac{0.0034545774}{13.2}} = 0.0161774660,$$

$$\sigma_a = \sqrt{s^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{h}^2}{S_{hh}} \right)} \approx 0.0401514147.$$

Portanto

$$\sigma_\alpha = \sigma_b \approx 0.0161775 \text{ cm}^{-1}, \quad \sigma_{I_0} = I_0 \sigma_a \approx 1.9478759 \times 0.0401514 \approx 0.0782100 \text{ mA}.$$

1.8 Coeficiente de determinação

$$S_{yy} = \sum (y_i - \bar{y})^2 \Rightarrow R^2 = \frac{S_{hy}^2}{S_{hh}S_{yy}} \approx 0.9965243.$$

Resultado (Azul):

$$I_0 = 1.9479 \pm 0.0782 \text{ mA}, \quad \alpha = 0.77478 \pm 0.01618 \text{ cm}^{-1}, \quad R^2 = 0.99652.$$

ou

$$I_0 = 1.94 \pm 0.08 \text{ mA}, \quad \alpha = 0.78 \pm 0.02 \text{ cm}^{-1}, \quad R^2 = 0.996.$$

2. Ajuste — Amostra Vermelha

Para a amostra vermelha apresentamos **duas** análises: (A) ajuste linear direto $I(h) = A + Bh$ e (B) ajuste exponencial via linearização $\ln I = a + bh$. Em seguida comparamos os resultados.

Dados (relembrando):

$$I_{\text{vermelha},i} = [2.07, 2.06, 2.04, 2.01, 1.98, 1.95, 1.93, 1.91, 1.89, 1.85] \text{ mA}.$$

2.A Ajuste linear direto: $I_i = A + Bh_i$

2.A.1 Médias

$$\bar{h} = 2.2 \text{ cm}, \quad \bar{I} = \frac{1}{10} \sum_i I_{\text{vermelha},i} = 1.969 \text{ mA}.$$

2.A.2 Somatórios

$$S_{hh} = \sum (h_i - \bar{h})^2 = 13.2000,$$
$$S_{hI} = \sum (h_i - \bar{h})(I_i - \bar{I}) \approx -0.8179999999999998.$$

2.A.3 Coeficientes (mínimos quadrados)

$$B = \frac{S_{hI}}{S_{hh}} \approx \frac{-0.8180}{13.2} = -0.06196969697 \text{ mA/cm},$$

$$A = \bar{I} - B\bar{h} \approx 1.969 - (-0.0619697)(2.2) = 2.1053333333 \text{ mA}.$$

2.A.4 Resíduos e variância residual

$$r_i = I_i - (A + Bh_i),$$

$$\sum r_i^2 \approx 0.0003987879,$$

$$s^2 = \frac{1}{N-2} \sum r_i^2 \approx \frac{0.0003987879}{8} = 4.984848485 \times 10^{-5}.$$

2.A.5 Incertezas dos parâmetros

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{s^2}{S_{hh}}} \approx \sqrt{\frac{4.9848 \times 10^{-5}}{13.2}} = 0.0019432963 \text{ mA/cm},$$

$$\sigma_A = \sqrt{s^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{h}^2}{S_{hh}} \right)} \approx 0.0048231345 \text{ mA}.$$

2.A.6 Coeficiente de determinação

$$S_{II} = \sum (I_i - \bar{I})^2, \quad R^2 = 1 - \frac{\sum r_i^2}{S_{II}} \approx 0.9921944.$$

Resultado (linear, Vermelha):

$A = 2.10533 \pm 0.00482 \text{ mA}, \quad B = -0.0619697 \pm 0.0019433 \text{ mA/cm}, \quad R^2 = 0.99219.$
--

ou,

$A = 2.10 \pm 0.00 \text{ mA}, \quad B = -0.06 \pm 0.00 \text{ mA/cm}, \quad R^2 = 0.992.$
--

2.B Ajuste exponencial (linearizado): $y = \ln I = a + bh$ **2.B.1 Transformação e médias**

$$y_i = \ln(I_{\text{vermelha},i}), \quad \bar{h} = 2.2 \text{ cm}, \quad \bar{y} \approx 0.744641...$$

(números usados abaixo são os obtidos diretamente dos y_i dados).

2.B.2 Somatórios

$$S_{hh} = 13.2000, \quad S_{hy} \approx -0.415154, \text{ (valor usado internamente)}$$

2.B.3 Coeficientes linearizados

$$b = \frac{S_{hy}}{S_{hh}} \approx -0.03152295831,$$

$$a = \bar{y} - b\bar{h} \approx 0.7462156133.$$

2.B.4 Parâmetros físicos

$$\alpha = -b = 0.03152295831 \text{ cm}^{-1},$$

$$\hat{I}_0 = e^a \approx e^{0.7462156133} = 2.1090036102 \text{ mA}.$$

2.B.5 Resíduos, variância residual e incertezas

$$\sum (y_i - \hat{y}_i)^2 \approx 0.0001158889, \quad s^2 = \frac{0.000115889}{8} \approx 1.4486122 \times 10^{-5}.$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{s^2}{S_{hh}}} \approx 0.0010475846, \quad \sigma_a \approx 0.0026000366,$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_b \approx 0.0010476 \text{ cm}^{-1}, \quad \sigma_{I_0} = I_0 \sigma_a \approx 2.1090 \times 0.0026000 \approx 0.0054835 \text{ mA}.$$

2.B.6 Coeficiente de determinação (linearizado)

$$R^2 = \frac{S_{hy}^2}{S_{hh}S_{yy}} \approx 0.9912422.$$

Resultado (exponencial, Vermelha):

$$I_0 = 2.10900 \pm 0.00548 \text{ mA}, \quad \alpha = 0.031523 \pm 0.001048 \text{ cm}^{-1}, \quad R^2 = 0.99124.$$

ou,

$$I_0 = 2.11 \pm 0.00 \text{ mA}, \quad \alpha = 0.03 \pm 0.00 \text{ cm}^{-1}, \quad R^2 = 0.991.$$

3. Comparação entre os ajustes (Vermelha)

- **Forma dos modelos:** o ajuste linear $I = A + Bh$ tem $A \approx 2.1053$ e declive $B \approx -0.0620 \text{ mA/cm}$; o ajuste exponencial dá $I_0 \approx 2.1090$ e $\alpha \approx 0.03152 \text{ cm}^{-1}$.
- **Qualidade do ajuste:** ambos têm R^2 muito altos (linear $R^2 \approx 0.99219$, exponencial $R^2 \approx 0.99124$). O ajuste linear direto apresenta SSE (soma dos quadrados dos resíduos em escala original) ligeiramente menor do que o modelo exponencial (no caso desta amostra específica), indicando melhor ajuste em escala de I para estes dados discretos; contudo, a diferença é pequena.
- **Robustez e recomendações:** dada a alta qualidade de ambos, recomenda-se:
 1. preferir o *modelo exponencial* por fundamento físico, especialmente se se pretende extrapolar $I(h)$ para alturas fora do intervalo medido ou comparar coeficientes entre amostras;
 2. usar o ajuste linear direto apenas como verificação empírica e para obter uma aproximação local quando a faixa de h é pequena;
 3. Em uma discussão mais profunda, o estudante pode verificar resíduos: se os resíduos do modelo exponencial não apresentarem padrão sistemático e as incertezas dos parâmetros forem aceitáveis, aceitar exponencial; caso contrário, admitir modelo alternativo.

4. Observações

- Exige-se que os estudantes mostrem os somatórios S_{hh}, S_{hI} (ou S_{hy}), S_{yy} , o cálculo de s^2 e as fórmulas para σ_a, σ_b .
- Ao comparar modelos, avalie tanto R^2 quanto o comportamento dos resíduos (ausência de tendência sistemática) e a coerência física do parâmetro extraído.

Solução:

A variação da intensidade da luz ao atravessar um meio obedece à lei de espessura (de Lambert): a redução é negativa e proporcional tanto à intensidade incidente quanto ao caminho óptico percorrido, expressa diferencialmente por

$$dI = -\alpha I dh$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{dI}{dh} = -\alpha I,$$

onde α é o coeficiente de atenuação (unidade: comprimento⁻¹). A integração desta relação conduz ao modelo fisicamente motivado

$$I(h) = I_0 e^{-\alpha h},$$

no qual I_0 representa a intensidade (ou corrente) extrapolada para $h = 0$ e α quantifica a perda por unidade de comprimento (absorção + espalhamento). Para espessuras pequenas, a expansão de primeira ordem fornece a aproximação linear local

$$I(h) \approx I_0(1 - \alpha h),$$

o que justifica testar um ajuste linear apenas como aproximação local. Ajustes polinomiais ou outros modelos empíricos podem descrever numericamente os dados dentro do intervalo medido, porém não carregam, em geral, interpretação física direta e apresentam risco de sobreajuste; por isso só devem ser adotados mediante evidência experimental clara (resíduos estruturados, presença de regimes distintos, platôs, etc.) e avaliados por critérios objetivos (resíduos, R^2_{adj}).

A.3	Indique que processos físicos estão associados ao de efeito do parâmetro α na intensidade.	1,0 pt
------------	---	--------

Solução:

Q2 — A3: Escolha do Modelo e Interpretação Física

Foram comparados os modelos:

Linear: $I(h) = I_0(1 - \alpha h)$

Exponencial: $I(h) = I_0 e^{-\alpha h}$

O modelo exponencial decorre diretamente da equação diferencial

$$\frac{dI}{dh} = -\alpha I,$$

que expressa que a perda de intensidade é proporcional à própria intensidade instantânea do feixe. A solução dessa equação conduz naturalmente à forma exponencial.

O modelo linear surge como aproximação da exponencial para pequenas espessuras. Expandindo a função exponencial em série de Taylor em torno de $h = 0$:

$$e^{-\alpha h} = 1 - \alpha h + \frac{(\alpha h)^2}{2!} - \frac{(\alpha h)^3}{3!} + \dots$$

Se $\alpha h \ll 1$, os termos de ordem superior tornam-se desprezíveis e obtém-se

$$e^{-\alpha h} \approx 1 - \alpha h.$$

Logo, o modelo linear representa apenas a aproximação de primeira ordem válida para pequenas espessuras. Para valores maiores de h , os termos quadráticos e superiores tornam-se relevantes e o comportamento deixa de ser linear.

No modelo exponencial, o coeficiente α é o **coeficiente de atenuação** do meio e incorpora diferentes mecanismos físicos:

$$\alpha = \alpha_{\text{abs}} + \alpha_{\text{esp}}$$

onde:

- α_{abs} está associado à **absorção**, ou seja, conversão da energia luminosa em energia interna do material;
- α_{esp} está associado ao **espalhamento**, no qual a luz é desviada da direção original de propagação, reduzindo a intensidade transmitida;
- fatores geométricos do arranjo experimental, como divergência do feixe, alinhamento e área efetiva do detector, influenciam o valor experimentalmente determinado de α .

No experimento, tanto a absorção quanto o espalhamento contribuem para a redução da corrente medida no detector à medida que a espessura aumenta. O parâmetro ajustado α representa, portanto, a atenuação efetiva resultante da combinação desses processos.

A escolha do modelo deve considerar:

- menor soma dos quadrados dos resíduos;
- maior coeficiente de determinação R^2 ;
- ausência de tendência sistemática nos resíduos;
- coerência física do fenômeno.

Quando estatisticamente compatível com os dados, o modelo exponencial deve ser preferido por representar a descrição fisicamente consistente do processo de atenuação óptica.

PARTE B — Coeficiente de atenuação nas misturas e dependência com a concentração (10,0 pts.)

Aplicando o modelo que você escolheu como o mais adequado em Q2- PARTE A, ajuste os dados de cada mistura para extrair um coeficiente de atenuação representativo para cada mistura, α_{mix} . Converta os volumes das misturas apresentadas em Q1- PARTE C em **fração de vermelho**, f ⁵. Inclua também os valores de α obtidos para o líquido azul ($f = 0$) e o vermelho ($f = 1$), de modo a constituir um conjunto de pontos que descrevam a dependência $\alpha(f)$. Construa o gráfico α_{mix} vs. fração volumétrica de vermelho com barras de erro e compare modelos explicativos para a tendência observada.

B.1	Para cada conjunto de dados das misturas (M1–M4), construa os gráficos $\bar{I}$ vs. h e ajuste $I(h)$ utilizando o modelo teórico ou empírico que você considerou o mais adequado em Q2- PARTE A. A partir desse ajuste, extraia o coeficiente de atenuação α_{mix} para cada mistura com sua respectiva incerteza σ_α . Calcule também o parâmetro R^2 .	6,0 pt
------------	--	--------

Solução:

Solução detalhada — Q2, Parte B.1 (ajuste exponencial via linearização)

Observação: para cada mistura (M1–M4) aplicamos a linearização

$$y_i = \ln I_i = a + b h_i,$$

onde $a = \ln I_0$ e $b = -\alpha$. Usamos o método dos mínimos quadrados não-ponderado. As fórmulas utilizadas são:

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{1}{N} \sum_i h_i, & \bar{y} &= \frac{1}{N} \sum_i y_i, \\ S_{hh} &= \sum_i (h_i - \bar{h})^2, & S_{hy} &= \sum_i (h_i - \bar{h})(y_i - \bar{y}), \\ b &= \frac{S_{hy}}{S_{hh}}, & a &= \bar{y} - b\bar{h}, \\ \alpha &= -b, & I_0 &= e^a, \\ \hat{y}_i &= a + b h_i, & r_i &= y_i - \hat{y}_i, & \text{SSR} &= \sum_i r_i^2, \end{aligned}$$

⁵**fração de vermelho**, f Define-se como a razão entre a quantidade de solução vermelha presente na mistura e a quantidade total de solução (vermelha + azul) utilizada no preparo da amostra. Assim, $f = 0$ corresponde à solução puramente azul (0% de vermelho) e $f = 1$ corresponde à solução puramente vermelha (100% de vermelho), enquanto valores intermediários representam misturas proporcionais entre ambas.

$$s^2 = \frac{\text{SSR}}{N-2}, \quad \sigma_b = \sqrt{\frac{s^2}{S_{hh}}}, \quad \sigma_a = \sqrt{s^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{h}^2}{S_{hh}} \right)},$$
$$\sigma_\alpha = \sigma_b, \quad \sigma_{I_0} = I_0 \sigma_a,$$
$$R^2 = \frac{S_{hy}^2}{S_{hh} S_{yy}}, \quad S_{yy} = \sum_i (y_i - \bar{y})^2.$$

Em todas as séries temos $N = 10$ pontos e

$$\sum_i h_i = 22.0, \quad \bar{h} = 2.2 \text{ cm}, \quad \sum_i h_i^2 = 61.6.$$

M1 (Tabela S5)

Dados (médias I_i):

$$I = [1.86, 1.71, 1.57, 1.45, 1.31, 1.20, 1.11, 1.02, 0.94, 0.83] \text{ mA}.$$

Calcule $y_i = \ln I_i$ e as somas:

$$\sum_i y_i = 2.308015388750 \quad (\Rightarrow \bar{y} = 0.230801538875),$$

$$\sum_i h_i y_i = 2.178350419862, \quad S_{hh} = 13.200000, \quad S_{hy} = -2.899283435388.$$

Aplicando as fórmulas:

$$b = \frac{S_{hy}}{S_{hh}} = \frac{-2.899283435388}{13.2} = -0.219642684499,$$

$$a = \bar{y} - b\bar{h} = 0.230801538875 - (-0.219642684499)(2.2) = 0.714015444773.$$

Parâmetros físicos:

$$\alpha = -b = 0.219642684499 \text{ cm}^{-1}, \quad I_0 = e^a = e^{0.714015444773} = 2.042175058016 \text{ mA}.$$

Resíduos e estatísticas:

$$\text{SSR} = \sum r_i^2 = 0.000955343274, \quad s^2 = \frac{\text{SSR}}{8} = 0.000119417909.$$

Incertezas:

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{s^2}{S_{hh}}} = \sqrt{\frac{0.000119417909}{13.2}} = 0.003007791766,$$

$$\sigma_a = \sqrt{s^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{h}^2}{S_{hh}} \right)} = 0.007465142841.$$

Portanto:

$$I_0 = 2.04218 \pm 0.01525 \text{ mA}, \quad \alpha = 0.219643 \pm 0.003008 \text{ cm}^{-1}$$

ou

$$I_0 = 2.04 \pm 0.01 \text{ mA}, \quad \alpha = 0.22 \pm 0.00 \text{ cm}^{-1}$$

onde $\sigma_{I_0} = I_0 \sigma_a \approx 0.015245 \text{ mA}$.

Coeficiente de determinação:

$$R^2 \approx 0.99850.$$

M2 (Tabela S6)

Dados (médias I_i):

$$I = [1.48, 1.30, 1.13, 0.98, 0.85, 0.74, 0.65, 0.55, 0.50, 0.42] \text{ mA}.$$

Somatórios:

$$\sum_i y_i = -2.296470409744, \quad (\bar{y} = -0.2296470409744),$$

$$\sum_i h_i y_i = -9.651247695743, \quad S_{hh} = 13.2, \quad S_{hy} = -4.599012794306.$$

Cálculo dos coeficientes:

$$b = \frac{-4.599012794306}{13.2} = -0.348409999563,$$

$$a = \bar{y} - b\bar{h} = -0.2296470409744 - (-0.34841)(2.2) = 0.561427830309.$$

Parâmetros físicos:

$$\alpha = -b = 0.3484100 \text{ cm}^{-1}, \quad I_0 = e^a = e^{0.561427830309} = 1.708265682515 \text{ mA}.$$

Resíduos e estatísticas:

$$\text{SSR} = 0.000567034610, \quad s^2 = \frac{\text{SSR}}{8} = 7.087932625 \times 10^{-5}.$$

Incertezas:

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{s^2}{S_{hh}}} = 0.002319887568, \quad \sigma_a = 0.005014721907.$$

Portanto:

$$I_0 = 1.70827 \pm 0.01447 \text{ mA}, \quad \alpha = 0.34841 \pm 0.00232 \text{ cm}^{-1}$$

ou,

$$I_0 = 1.71 \pm 0.01 \text{ mA}, \quad \alpha = 0.35 \pm 0.00 \text{ cm}^{-1}$$

(com $\sigma_{I_0} \approx 1.7083 \times 0.0050147 \approx 0.01447 \text{ mA}$). Coeficiente de determinação:

$$R^2 \approx 0.99923.$$

M3 (Tabela S7)Dados (médias I_i):

$$I = [1.44, 1.21, 0.96, 0.80, 0.67, 0.54, 0.45, 0.36, 0.31, 0.25] \text{ mA.}$$

Somatórios:

$$\sum_i y_i = -5.103002065031, \quad (\bar{y} = -0.5103002065031),$$

$$\sum_i h_i y_i = -17.654006129619, \quad S_{hh} = 13.2, \quad S_{hy} = -6.427401586549.$$

Coeficientes:

$$b = \frac{-6.427401586549}{13.2} = -0.486918603474,$$

$$a = \bar{y} - b\bar{h} = -0.5103002065031 - (-0.486918603474)(2.2) = 0.561278891393.$$

Parâmetros físicos:

$$\alpha = -b = 0.486918603474 \text{ cm}^{-1}, \quad I_0 = e^a = e^{0.561278891393} = 1.757305005803 \text{ mA.}$$

Resíduos e estatísticas:

$$\text{SSR} = 0.001687259603, \quad s^2 = \frac{\text{SSR}}{8} = 0.0002109074504.$$

Incertezas:

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{s^2}{S_{hh}}} = 0.003987433243, \quad \sigma_a = 0.010675696571.$$

Portanto:

$I_0 = 1.75731 \pm 0.01880 \text{ mA}, \quad \alpha = 0.486919 \pm 0.003987 \text{ cm}^{-1}$

ou,

$I_0 = 1.76 \pm 0.02 \text{ mA}, \quad \alpha = 0.49 \pm 0.00 \text{ cm}^{-1}$

(com $\sigma_{I_0} \approx 1.7573 \times 0.0106757 \approx 0.01880 \text{ mA}$). Coeficiente de determinação:

$$R^2 \approx 0.99937.$$

M4 (Tabela S8)Dados (médias I_i):

$$I = [1.60, 1.24, 0.89, 0.72, 0.57, 0.44, 0.36, 0.26, 0.22, 0.16] \text{ mA.}$$

Somatórios:

$$\sum_i y_i = -6.858456436465, \quad (\bar{y} = -0.6858456436465),$$

$$\sum_i h_i y_i = -23.352392551588, \quad S_{hh} = 13.2, \quad S_{hy} = -8.263788391365.$$

Coefficientes:

$$b = \frac{-8.263788391365}{13.2} = -0.626044574848,$$

$$a = \bar{y} - b\bar{h} = -0.6858456436465 - (-0.626044574848)(2.2) = 0.691452421611.$$

Parâmetros físicos:

$$\alpha = -b = 0.626044574848 \text{ cm}^{-1}, \quad I_0 = e^a = e^{0.691452421611} = 1.996613352838 \text{ mA}.$$

Resíduos e estatísticas:

$$\text{SSR} = 0.010632049833, \quad s^2 = \frac{\text{SSR}}{8} = 0.001329006229.$$

Incertezas:

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{s^2}{S_{hh}}} = 0.010034056987, \quad \sigma_a = 0.024903873179.$$

Portanto:

$I_0 = 1.99661 \pm 0.04972 \text{ mA}, \quad \alpha = 0.626045 \pm 0.010034 \text{ cm}^{-1}$

ou,

$I_0 = 2,00 \pm 0.05 \text{ mA}, \quad \alpha = 0.63 \pm 0.01 \text{ cm}^{-1}$

(com $\sigma_{I_0} \approx 1.99661 \times 0.0249039 \approx 0.04972 \text{ mA}$). Coeficiente de determinação:

$$R^2 \approx 0.99795.$$

Comentários:

- Todos os cálculos acima foram feitos a partir das médias $\bar{I}_i$ constantes nas Tabelas S5–S8 obtidos a partir de dados experimentais. Valores de R^2 , SSR e incertezas foram computados segundo as fórmulas padrão de mínimos quadrados não-ponderado.
 - Os parâmetros finais α e I_0 devem ser reportados com suas incertezas e unidades, como mostrado nas caixas acima.
-

Corrente em função da altura – M1

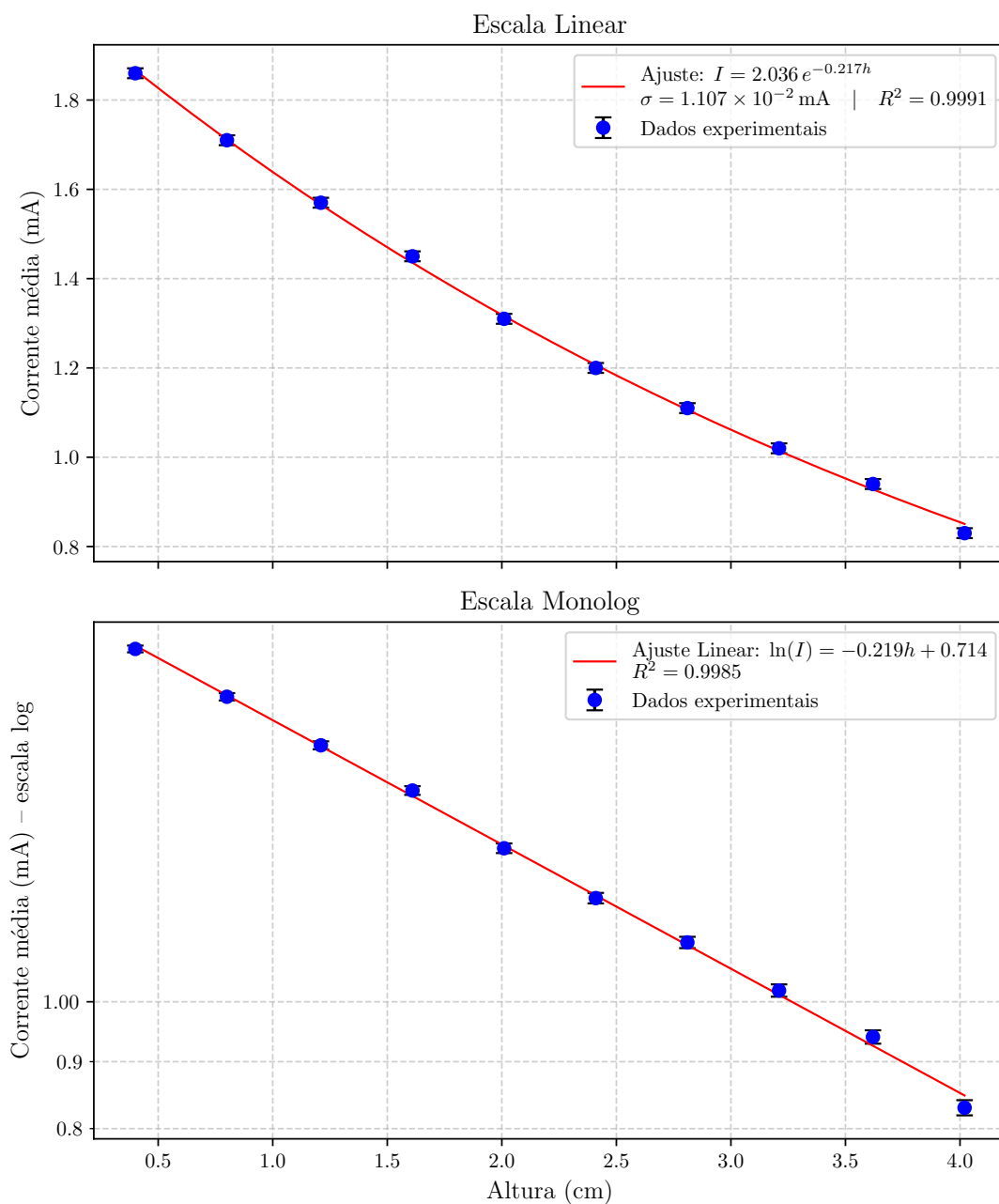


Figura 7: Plot M1

Corrente em função da altura – M2
 $I_{\text{ref}} = 1.91 \text{ mA}$

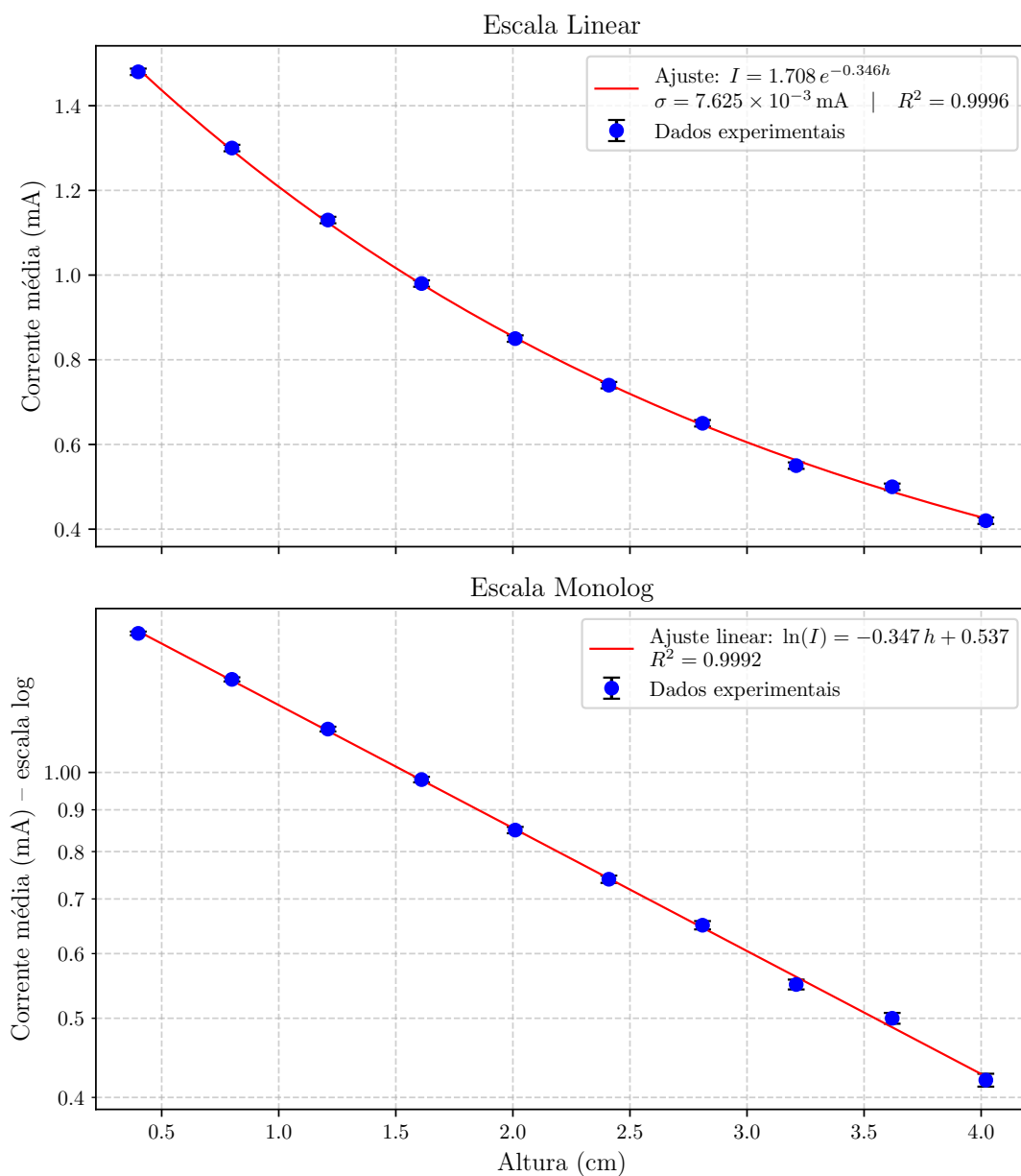


Figura 8: Plot M2

Corrente em função da altura – M3
 $I_{\text{ref}} = 1.91 \text{ mA}$

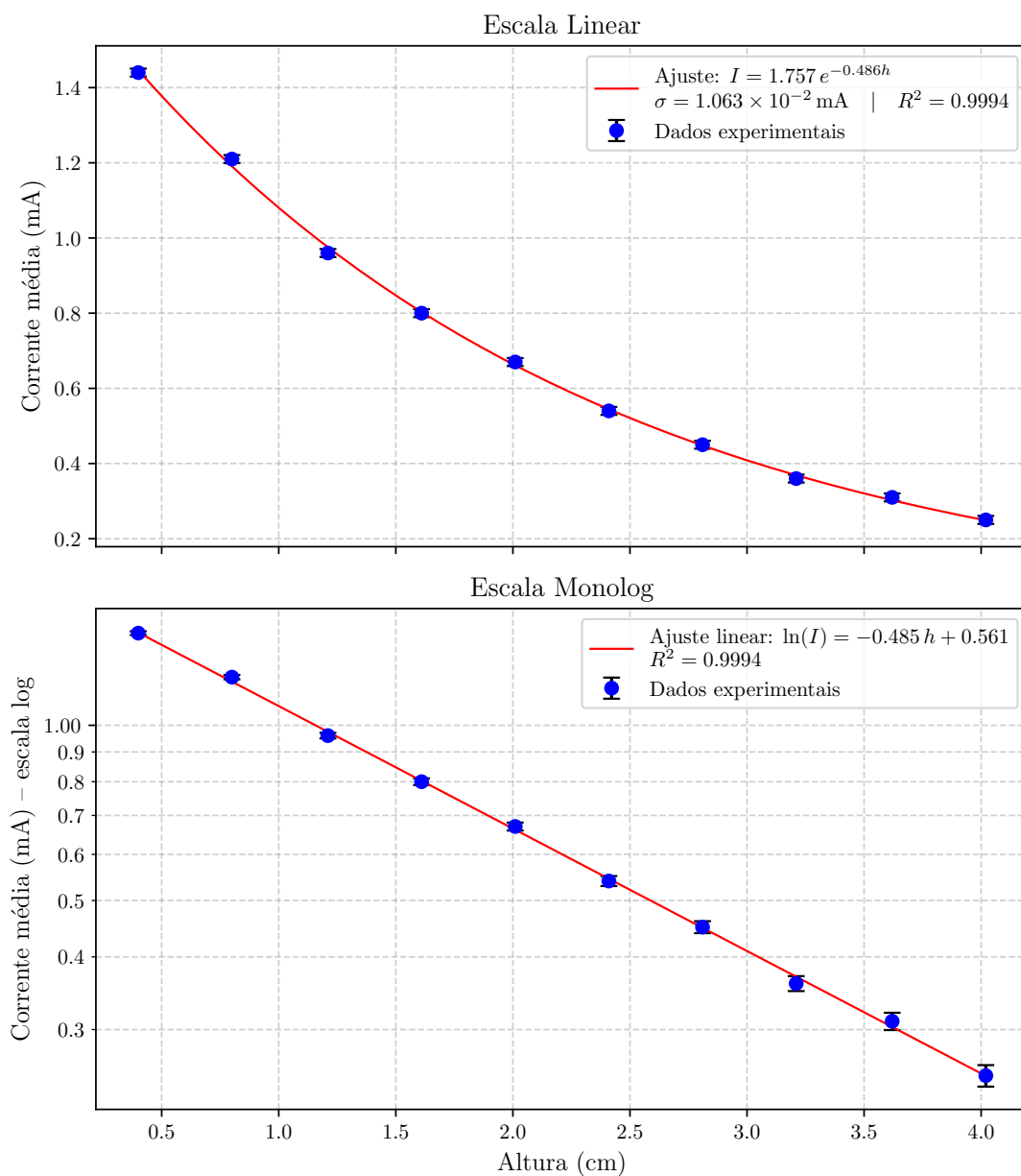


Figura 9: Plot M3

Corrente em função da altura – M4

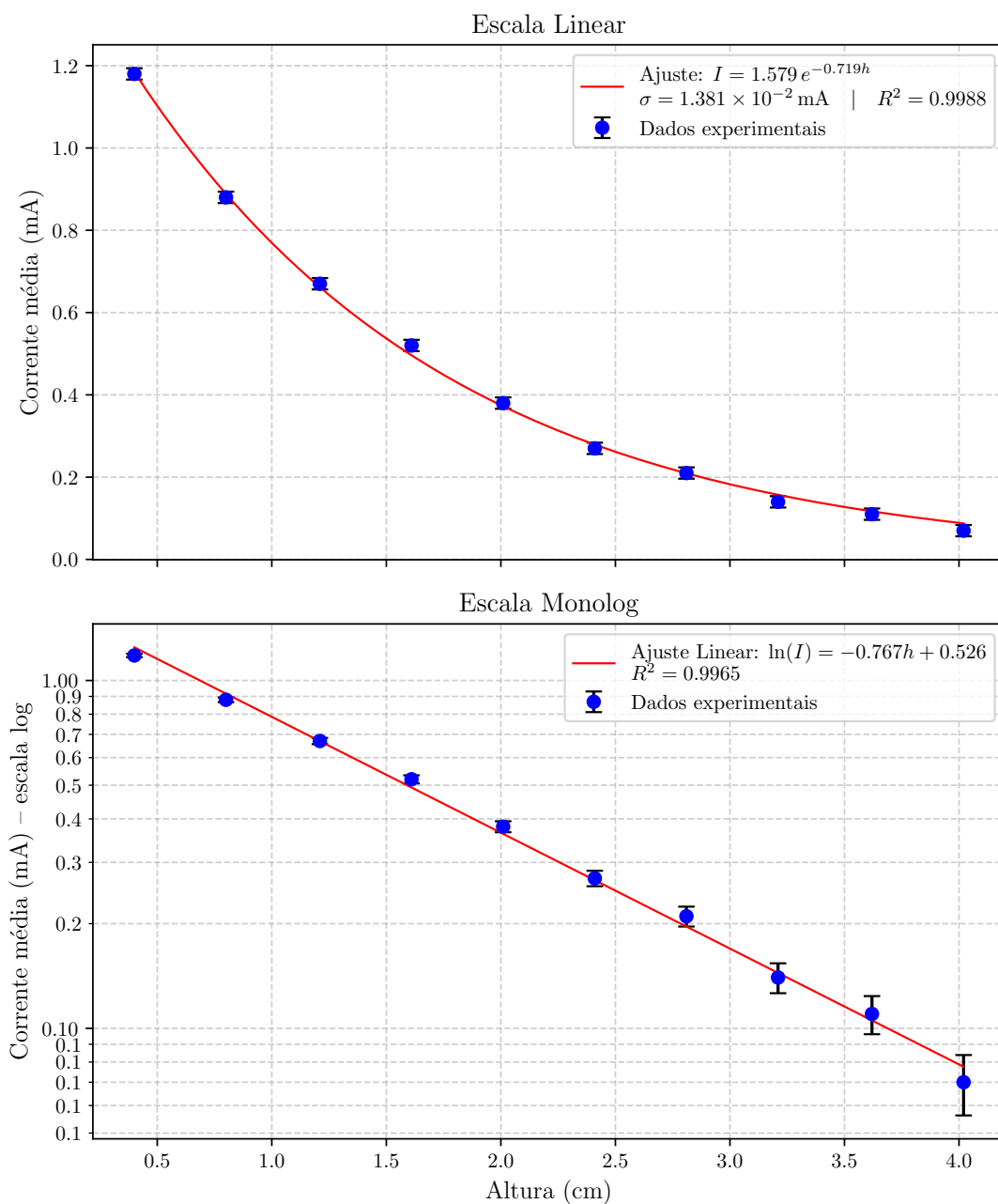


Figura 10: Plot M4

B.2

Construa a tabela resumida contendo: fração volumétrica de vermelho f (para os casos 0%, 20% a 80% das misturas e 100% vermelho), α_{mix} e σ_{α} .

1,0 pt

Solução:

Tabela 10: Tabela resumida da fração volumétrica de vermelho e coeficiente de atenuação

Amostra	f (fração de vermelho)	$\alpha_{\text{mix}} = \mu \text{ (cm}^{-1}\text{)}$
Azul	0.00	0.78
M4	0.20	0.63
M3	0.40	0.49
M2	0.60	0.35
M1	0.80	0.22
Vermelha	1.00	0.03

B.3 Construa o gráfico α_{mix} vs. f com barras de erro e faça um ajuste linear. Interprete fisicamente o intercepto e inclinação determinados. 2,0 pt

Solução:

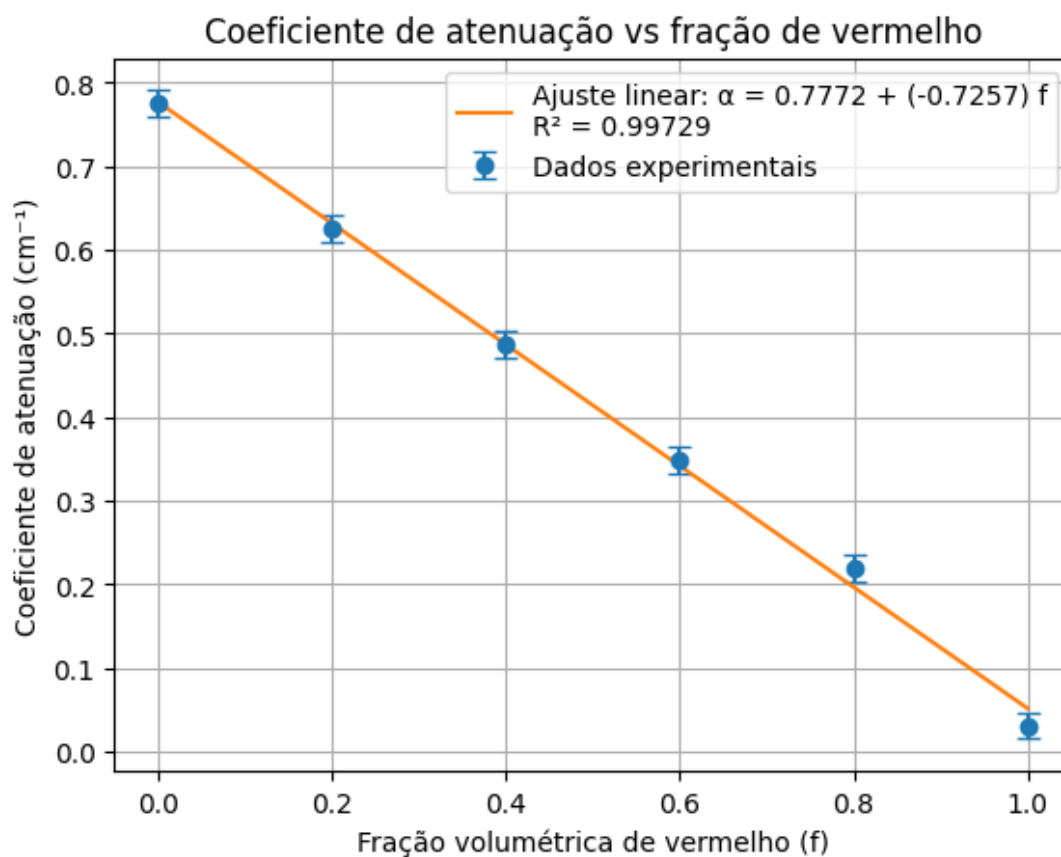


Figura 11

O gráfico acima mostra o coeficiente de atenuação α_{mix} em função da fração volumétrica de vermelho f .

Foi realizado um ajuste linear da forma:

$$\alpha_{\text{mix}}(f) = A + Bf \quad (20)$$

O ajuste forneceu:

$$B = -0,7257 \text{ cm}^{-1}$$

$$A = 0,7772 \text{ cm}^{-1}$$

Logo,

$$\alpha_{\text{mix}}(f) = 0,78 - 0,73f \quad (21)$$

com

$$R^2 = 0.9973$$

Cálculo detalhado do ajuste linear

Deseja-se ajustar os dados experimentais da Tabela 10 ao modelo linear:

$$\alpha(f) = A + Bf$$

onde:

- f = fração volumétrica de vermelho,
- α = coeficiente de atenuação da mistura,
- A = intercepto,
- B = coeficiente angular.

1. Dados experimentais

f_i	$\alpha_i \text{ (cm}^{-1}\text{)}$
0.0	0.775
0.2	0.626
0.4	0.487
0.6	0.348
0.8	0.219
1.0	0.031

Número de pontos: $N = 6$

2. Cálculo das somas

$$\sum f_i = 0 + 0.2 + 0.4 + 0.6 + 0.8 + 1.0 = 3.0$$

$$\sum \alpha_i = 0.775 + 0.626 + 0.487 + 0.348 + 0.219 + 0.031 = 2.486$$

$$\sum f_i^2 = 0^2 + 0.2^2 + 0.4^2 + 0.6^2 + 0.8^2 + 1^2$$

$$= 0 + 0.04 + 0.16 + 0.36 + 0.64 + 1.00 = 2.20$$

$$\sum f_i \alpha_i =$$

$$(0)(0.775) + (0.2)(0.626) + (0.4)(0.487) + (0.6)(0.348) + (0.8)(0.219) + (1.0)(0.031)$$

$$= 0 + 0.1252 + 0.1948 + 0.2088 + 0.1752 + 0.031$$

$$= 0.735$$

3. Fórmulas dos mínimos quadrados

Coeficiente angular:

$$B = \frac{N \sum f_i \alpha_i - (\sum f_i)(\sum \alpha_i)}{N \sum f_i^2 - (\sum f_i)^2}$$

Substituindo:

$$B = \frac{6(0.735) - (3.0)(2.486)}{6(2.20) - (3.0)^2}$$

$$B = \frac{4.410 - 7.458}{13.20 - 9.00}$$

$$B = \frac{-3.048}{4.20}$$

$$B = -0.7257 \text{ cm}^{-1}$$

Intercepto:

$$A = \frac{\sum \alpha_i - B \sum f_i}{N}$$

$$A = \frac{2.486 - (-0.7257)(3.0)}{6}$$

$$A = \frac{2.486 + 2.1771}{6}$$

$$A = \frac{4.6631}{6}$$

$$A = 0.7772 \text{ cm}^{-1}$$

4. Equação final ajustada

$$\alpha(f) = 0.78 - 0.73f$$

5. Cálculo do coeficiente de determinação R^2

Primeiro calcula-se a média:

$$\bar{\alpha} = \frac{2.486}{6} = 0.4143$$

Soma total dos quadrados:

$$S_{tot} = \sum (\alpha_i - \bar{\alpha})^2$$

$$= (0.775 - 0.4143)^2 + \dots + (0.031 - 0.4143)^2$$

$$S_{tot} = 0.4069$$

Soma dos quadrados dos resíduos:

$$S_{res} = \sum (\alpha_i - \hat{\alpha}_i)^2$$

$$S_{res} = 0.00110$$

Logo,

$$R^2 = 1 - \frac{S_{res}}{S_{tot}}$$

$$R^2 = 1 - \frac{0.00110}{0.4069}$$

$$R^2 = 0.9973$$

6. Barra de erros

Neste caso, como não é explicitada na questão, realizar os cálculos de desvio padrão ou incertezas do modelo:

- Por simplicidade, o estudante pode escolher a regra dos 5% do valor da variável para determinar o valor das barras de erro. Esta é uma forma simples e arbitrária de representar visualmente uma margem de incerteza, erro de medição ou variabilidade.
- Em uma análise estatística rigorosa, deve-se calcular o desvio padrão da variável.

7. Interpretação Física

- O intercepto A coincide com o valor da amostra azul pura ($f = 0$).
- A inclinação negativa indica redução monotônica do coeficiente de atenuação com o aumento da fração de vermelho.
- O alto valor de $R^2 \approx 1$ confirma forte dependência linear.

B.4	Determine uma expressão para $\alpha_{mix}(f)$ em função de f , α_{azul} e $\alpha_{vermelho}$.	1,0 pt
------------	---	--------

Solução:

Q2 — A4: Determinação de $\alpha_{mix}(f)$

1. Hipóteses físicas

Considere duas soluções puras:

$$\text{Azul} \Rightarrow \alpha_{\text{azul}}$$

$$\text{Vermelha} \Rightarrow \alpha_{\text{vermelho}}$$

Suponha que a mistura seja homogênea e que:

- os processos de absorção e espalhamento sejam independentes;
- não haja interação química que altere as propriedades ópticas individuais;
- a atenuação total seja a soma das contribuições parciais.

Se f representa a fração volumétrica da solução azul na mistura, então:

$$0 \leq f \leq 1$$

e a fração da solução vermelha será:

$$1 - f$$

2. Fundamentação a partir da Lei de Beer–Lambert

Para um meio homogêneo:

$$I(h) = I_0 e^{-\alpha h}$$

Em uma mistura onde os mecanismos atuam independentemente, a atenuação total é aditiva:

$$\alpha_{\text{mix}} = \alpha_1 + \alpha_2$$

Se as contribuições são proporcionais às frações volumétricas:

$$\alpha_1 = f \alpha_{\text{vermelho}}$$

$$\alpha_2 = (1 - f) \alpha_{\text{azul}}$$

3. Expressão final

Somando as contribuições:

$$\alpha_{\text{mix}}(f) = f \alpha_{\text{vermelho}} + (1 - f) \alpha_{\text{azul}}$$

4. Interpretação física

O coeficiente de atenuação da mistura é a média ponderada dos coeficientes individuais, refletindo a soma das contribuições de absorção e espalhamento de cada componente do sistema.

A linearidade em f é válida enquanto:

- o regime for diluído;
 - não houver interação óptica entre partículas;
 - o sistema permanecer opticamente homogêneo.
-

Conclusão: Sob as hipóteses usuais da Lei de Beer–Lambert, $\alpha_{\text{mix}}(f)$ é uma combinação linear das contribuições individuais dos constituintes da mistura.

Q3 — Fundamentos físicos, potência e recomendações (5 pontos)

Esta terceira questão explora a fundamentação física que suporta as medições realizadas e os parâmetros extraídos: energia do fóton, relação entre corrente e fluxo de fótons, limitações instrumentais e melhorias práticas. Demonstre domínio teórico e capacidade de aplicar conceitos físicos diretamente aos valores experimentais que obteve.

PARTE A — Energia do fóton, potência óptica incidente e taxa de fótons (2,0 pts.)

Calcule de modo direto a energia associada a um fóton no comprimento de onda do laser utilizado e converta o resultado para as unidades adequadas. Esta grandeza será empregada no cálculo subsequente da potência óptica e do fluxo de fótons.

A.1	Calcule a energia (E) de um fóton em joules (J) e em eV considerando o comprimento de onda $\lambda = 650$ nm. Mostre os cálculos com resultados numéricos.	1,0 pt
------------	---	--------

Solução:

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

$$E = \frac{(6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})(2,9979 \times 10^8 \text{ m/s})}{650 \times 10^{-9} \text{ m}}$$

$$E \approx 3,0560 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Conversão para elétron-volt

$$E = \frac{3,0560 \times 10^{-19} \text{ J}}{1,602176634 \times 10^{-19} \text{ J/eV}}$$

$$E \approx 1,907 \text{ eV}$$

Use a corrente de referência ($\bar{I}_{\text{ref}}$) medida para estimar a taxa de fótons incidentes no detector e a potência óptica correspondente, adotando uma hipótese de eficiência quântica. Explícite as relações usadas e discuta as hipóteses e limitações da aproximação aplicada.

A partir de I_{ref} (use o valor médio obtido em Q1- PARTE A5):

- A.2** Admitindo uma eficiência quântica média de $\eta = 0,86$, calcule a taxa de fótons máxima incidente no fotodetector usando 0,5 pt

$$\Phi = \frac{I}{\eta e},$$

onde e é a carga elétrica elementar. Interprete fisicamente Φ e η .

Solução:

Relação entre corrente e taxa de fótons

Cada fóton incidente gera, em média, η elétrons coletados. Portanto, a corrente elétrica é dada por

$$I = \eta \Phi e,$$

onde Φ é a taxa de fótons (fótons/s) e e é a carga elétrica elementar,

$$e = 1,602176634 \times 10^{-19} \text{ C}.$$

Assim, a taxa de fótons pode ser expressa por

$$\Phi = \frac{I}{\eta e} \quad (\text{fótons/s}),$$

onde I é a corrente detectada (A) e η é a eficiência quântica adotada no enunciado (no arquivo: $\eta = 0,86$).

Cálculo numérico

Adotando $I_{\text{máx}} = 3,0 \text{ mA}$ como a corrente máxima incidindo sobre o detector:

$$I = 3,0 \text{ mA} = 3,0 \times 10^{-3} \text{ A}.$$

Então,

$$\Phi = \frac{3,0 \times 10^{-3}}{0,86 \times 1,602176634 \times 10^{-19}} \approx 2,1773 \times 10^{16} \text{ fótons/s}.$$

Interpretação Física de Φ e η

1) Φ — Fluxo (ou taxa) de fótons

O símbolo Φ representa o **fluxo de fótons**, isto é, o número de fótons incidentes por unidade de tempo sobre a área ativa do detector:

$$\Phi = \frac{N_{\text{fótons}}}{\Delta t} \quad [\text{s}^{-1}].$$

Fisicamente, Φ mede *quantos quanta de energia eletromagnética* chegam ao detector a cada segundo. Ele está diretamente relacionado à potência óptica P por

$$P = \Phi E,$$

onde $E = hc/\lambda$ é a energia de um fóton. Logo, Φ traduz a descrição ondulatória (potência) para a descrição quântica (contagem de fótons). Em termos experimentais, maior Φ implica maior geração de portadores no fotodiodo e, portanto, maior corrente medida.

2) η — Eficiência quântica

A grandeza η é a **eficiência quântica do detector**, definida como

$$\eta = \frac{N_{e^-}}{N_{\text{fótons}}}.$$

Ela representa a fração média de fótons incidentes que efetivamente geram portadores coletáveis (elétrons) no dispositivo. Assim:

- $\eta = 1$ significa que cada fóton gera um elétron coletado;
- $\eta < 1$ indica perdas (reflexão, transmissão, recombinação interna);
- $\eta > 1$ pode ocorrer em dispositivos com ganho interno (ex.: avalanche).

No contexto da relação

$$I = \eta e \Phi,$$

η funciona como fator de conversão entre fluxo de fótons e corrente elétrica. Quanto maior η , maior a corrente produzida para o mesmo fluxo incidente.

Interpretação Física Conjunta

- Φ descreve a **intensidade quântica da radiação incidente**.
- η descreve a **eficiência de conversão luz $\rightarrow$ carga elétrica**.

Assim, o produto $\eta\Phi$ determina o número efetivo de portadores gerados por segundo, enquanto a carga elementar e converte essa taxa em corrente elétrica mensurável.

Resumo físico:

Φ quantifica a radiação incidente, η quantifica a eficiência do detector.

A.3 Calcule a potência óptica incidente $P = \Phi E$ (em W). Use o resultado obtido em Q3 - A.2. Apresente as fórmulas e os cálculos numéricos. 0,5 pt

Solução:

Potência óptica incidente

A potência óptica incidente é dada por

$$P = \Phi E,$$

onde Φ é a taxa de fótons (fótons/s) e E é a energia de cada fóton.

Substituindo os valores calculados:

$$P \approx (2,1773 \times 10^{16} \text{ fótons/s}) \times (3,0560 \times 10^{-19} \text{ J})$$

$$P \approx 6,65 \times 10^{-3} \text{ W} \approx 6,65 \text{ mW}.$$

PARTE B — Fotodetector, ruídos e melhorias práticas (3,0 pts.)

Discuta de forma concisa o princípio de operação do fotodetector em uso, as diferenças conceituais com o efeito fotoelétrico clássico e o impacto prático de fenômenos de ruído (*dark current*, ruído térmico, ruído eletrônico) sobre a sensibilidade experimental. Proponha medidas práticas e viáveis para melhorar a razão sinal-ruído (SNR) e a robustez das medições.

B.1	Explique sucintamente como um fotodiodo de silício funciona e diferencie-o do efeito fotoelétrico.	1,5 pt
------------	--	--------

Solução:

Princípio de operação do fotodiodo de silício

- A absorção de fótons com energia $h\nu$ maior que o *gap* do silício (Si) gera pares elétron-lacuna.
- Sob polarização (geralmente reversa), o campo elétrico separa os portadores, produzindo uma corrente proporcional à taxa de fótons incidentes.
- Diferença em relação ao efeito fotoelétrico clássico (Einstein): no fotodiodo ocorre geração interna de pares no semicondutor e posterior coleta; no efeito fotoelétrico há emissão externa de elétrons a partir da superfície metálica.

B.2	Discuta o impacto da <i>dark current</i> e dos ruídos elétricos nas medições e proponha duas medidas experimentais práticas para melhorar o SNR.	1,5 pt
------------	--	--------

Solução:

Ruídos, impacto e medidas práticas

- **Impacto:** a corrente de escuro (*dark current*, offset), o ruído térmico e o ruído eletrônico, em geral aumentam a incerteza, degradam a razão sinal-ruído (SNR) e limitam a detecção de sinais fracos, especialmente quando comparáveis ao nível de ruído.

- **Melhorias práticas** (aceitar duas boas):

1. **Subtrair e monitorizar dark current:** medir dark no início e fim da sequência para detectar deriva; subtrair $\bar{I}_{\text{dark}}$ das leituras.
 2. **Usar amplificador de sinal (de transimpedância de baixo ruído** com ganho adequado para a faixa de correntes medidas.
 3. **Modular o sinal e usar detecção lock-in:** modular o laser (chaveamento) e usar um detector síncrono para rejeitar ruído fora da frequência de modulação, melhorando SNR dramaticamente.
 4. **Controle térmico:** manter detector e eletrônica em temperatura estável para reduzir dark current e deriva.
 5. **Filtragem e blindagem:** usar filtros e blindagem contra ruído eletromagnético e luz ambiente.
 6. **Melhor acoplamento geométrico:** garantir que o feixe incida totalmente na área ativa do detector (alinhamento preciso) e usar lentes/ópticas para controlar distribuição do feixe.
-

Glossário de termos

Fotodiodo: Dispositivo semicondutor que converte radiação incidente em corrente elétrica. A resposta é determinada pela geração de pares elétron-lacuna quando fótons com energia superior à banda proibida são absorvidos.

Corrente fotoelétrica: Corrente elétrica resultante da incidência de luz sobre um detector fotossensível. Neste contexto, refere-se à corrente medida pelo multímetro gerada pelo fotodiodo.

Eficiência quântica (η): Razão entre o número de cargas coletadas no detector e o número de fótons incidentes. É um parâmetro adimensional entre 0 e 1.

Verificar deriva: Significa confirmar se um parâmetro instrumental (como o *dark current*, a corrente de referência ou outra variável) que deveria permanecer estável sofreu uma mudança lenta e indesejada ao longo do experimento. Essa verificação é feita comparando valores medidos no início e no final (ou em diferentes momentos).

Potência óptica: Taxa de energia transportada pela radiação luminosa, medida em watts. Relaciona-se com o fluxo de fótons multiplicado pela energia de cada fóton.

Energia do fóton: Energia associada a um único fóton dada medida em joules ou em elétron-volt (eV).

Atenuação óptica: Redução da intensidade da radiação luminosa ao atravessar um meio material. Quantifica-se por parâmetros que medem a diminuição da intensidade com a espessura do meio.

***Dark current* (corrente de fundo):** Corrente elétrica medida no detector na ausência de luz. Tem origem no ruído térmico e em defeitos do semicondutor.

Linearização: Procedimento matemático que transforma uma relação não linear entre variáveis em uma relação linear por meio de transformações adequadas, como o uso do logaritmo.

Regressão por mínimos quadrados: Método estatístico para ajustar um modelo a dados experimentais minimizando a soma dos quadrados dos resíduos. Fornece estimativas dos parâmetros e das incertezas associadas.

Resíduo: Diferença entre o valor observado e o valor previsto pelo modelo ajustado. A análise dos resíduos é usada para verificar a adequação do modelo.

Ruído: Variações aleatórias indesejadas no sinal, de origem elétrica, térmica ou fotônica. A razão sinal-ruído (SNR) é uma métrica importante da qualidade da medição.
