

Q1 - Luz... Câmera... AÇÃO! (20 pontos)

Em 1744, Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) introduziu a ação mínima na mecânica clássica.

“A natureza, na produção dos seus efeitos, age sempre pelos meios mais simples... o caminho que ela toma é aquele pelo qual a quantidade de **ação** é a menor.”

Dois anos depois, em 1746, ele escreve:

“Este princípio de ação mínima, um princípio tão sábio e digno de Ser Supremo, é **intrínseco a todos os fenômenos naturais**. Quando ocorre uma mudança na natureza, a quantidade de ação necessária para essa mudança é a menor possível. A quantidade de ação de um corpo é o produto da massa vezes a velocidade e a distância que ele se move.”



Figura 1: Pierre Maupertuis, precursor do princípio da mínima ação na mecânica.

Nesse problema, vamos explorar o princípio da mínima ação em diferentes contextos físicos. Esse problema é composto de 5 partes independentes que ilustram como a ação se relaciona com diferentes áreas da física. Definiremos a seguir a ação A e a função lagrangeana L em diferentes contextos. Combine as definições dadas neste problema com seus conhecimentos prévios para resolver os itens a seguir.

Parte A - A ação “estacionária” na mecânica clássica (4,0 pontos)

O princípio da mínima ação afirma que a trajetória efetivamente seguida por um sistema físico entre dois eventos fixos em um diagrama espaço-tempo — um ponto inicial A e um ponto final B — é tal que a ação associada a essa trajetória é estacionária quando comparada às trajetórias vizinhas possíveis.

Matematicamente, isso significa o seguinte: considere uma trajetória real $x(t)$ e uma família de trajetórias levemente perturbadas,

$$q(t) = x(t) + \eta(t),$$

onde $\eta(t)$ representa uma perturbação arbitrária, porém pequena, que se anula nos instantes inicial e final, isto é,

$$\eta(t_A) = \eta(t_B) = 0.$$

Dizemos que a ação é estacionária se a variação da ação ao redor da trajetória real satisfaz

$$\delta A = A[q(t)] - A[x(t)] = 0.$$

É importante notar que o termo estacionária não implica, necessariamente, que a ação seja mínima: ela pode corresponder a um mínimo, um máximo ou um ponto de sela. O ponto central é que pequenas variações da trajetória não alteram a ação em primeira ordem.

Na formulação original de Maupertuis, a ação era definida como a soma, ao longo do percurso, do produto entre a massa do corpo, o módulo de sua velocidade e o comprimento do elemento de trajetória percorrido:

$$A_M = \sum m v s.$$

No limite contínuo, essa expressão pode ser escrita como uma integral ao longo da trajetória espacial do sistema,

$$A_M = \int m v ds,$$

onde ds representa um elemento infinitesimal de comprimento do caminho efetivamente seguido pelo corpo.

Essa definição histórica de ação será o ponto de partida para as discussões e aplicações exploradas nas próximas partes do problema.

- A.1** Supondo que a ação de Maupertuis é mínima e o princípio da conservação de energia mecânica é válido, prove o princípio de Hamilton, que diz que a ação de Hamilton 1,5pt

$$A_H = \int L dt,$$

é mínima. Na mecânica clássica, a função $L = E_c - E_p$ corresponde à diferença da energia cinética e potencial do sistema, sendo chamada de função Lagrangeana do sistema.

Gabarito:

A.1 - 1,5

$$\begin{aligned} \delta \int m v ds &= \delta \int m v^2 dt = 0 \\ \delta \int 2E_c dt &= \delta \int (E_c + E_c) dt = \delta \int (E_c + E - E_p) dt \\ \delta \int (E_c - E_p) dt &+ \delta \int E dt = 0 \end{aligned}$$

Num movimento sob os efeitos do campo gravitacional E : constante, daí...

$$\delta \int (E_c - E_p) dt + \delta(Et) = \delta \int (E_c - E_p) dt + (\delta E)t + E\delta t = 0$$

assim

$$\delta \int (E_c - E_p) dt + E\delta t = 0 \Rightarrow \delta \int (E_c - E_p) dt = 0$$

já que as duas trajetórias tem o mesmo tempo de percurso. Então

$$\delta \int L dt = 0 \Rightarrow \boxed{A_H = \int L dt}$$

- 0,25 pontos por escrever o diferencial da ação como uma integral no tempo: $\delta \int m v^2 dt = 0$

- 0,5 pontos por escrever o diferencial da ação em função das energias mecânica, cinética, potencial:
 $\delta \int (E_c - E_p) dt + \delta \int E dt = 0$

- 0,5 pontos por chegar à expressão: $\delta \int (E_c - E_p) dt + E\delta t = 0$

- 0,25 pelo resultado final

Vejamos agora um exemplo simples em que a energia potencial $U(x)$ depende linearmente da posição,

$$U(x) = U_0 + kx,$$

com k constante. Estudaremos o movimento de uma partícula sujeita a esse potencial no intervalo temporal $-T \leq t \leq T$, impondo as condições de contorno

$$x(-T) = -X, \quad x(T) = X.$$

À primeira vista, a escolha simétrica de tempos e posições pode parecer artificial. No entanto, ela não restringe a generalidade do problema: sempre posso transladar as origens de t e de x de modo que o instante médio entre os extremos seja $t = 0$ e o ponto médio entre as posições extremas seja $x = 0$. Essa convenção apenas simplifica a álgebra, preservando o conteúdo físico.

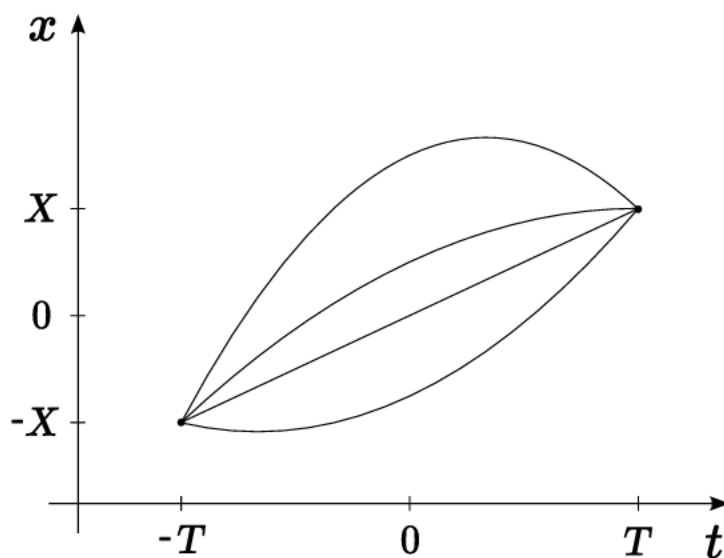
Em seguida, em vez de considerar todos os caminhos possíveis $x(t)$ entre os pontos fixos, restringiremos a atenção a uma família particularmente simples: trajetórias cujos gráficos sejam parábolas que passam pelos pontos de contorno. Assim, tomamos $x(t)$ como uma função quadrática,

$$x(t) = At^2 + Bt + C.$$

Essa forma envolve três parâmetros, mas as duas condições de contorno em $t = \pm T$ impõem duas restrições independentes, restando apenas um parâmetro livre. Uma parametrização conveniente dessa família é

$$x(t) = \frac{X}{T}t + \frac{1}{2}a(t^2 - T^2),$$

onde a é o único parâmetro ajustável. Nesta classe de trajetórias, ele coincide com a aceleração constante associada à parábola.



A.2 Encontre uma expressão que forneça a função ação $A_H(a)$. Use o princípio da mínima ação para provar que $a = -\frac{k}{m}$ e encontrar $A_{H,min}$. 2,5pt

Observação: as coordenadas $(-T, -X)$ e (T, X) representam pontos fixos da trajetória.

Isto significa, como sabemos, que a força $F = -\frac{dU}{dx}$.

Gabarito:

A.2 - 2,5

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) = \frac{X}{T} + at$$

a energia cinética

$$E_c = \frac{1}{2}m \left(\frac{X}{T} + at \right)^2$$

a energia potencial, eliminando x

$$E_p(t) = k \left(\frac{X}{T}t + \frac{1}{2}a(t^2 - T^2) \right)$$

a ação

$$A_H = \int_{-T}^T \left[\frac{1}{2}m \left(\frac{X}{T} + at \right)^2 - k \left(\frac{X}{T}t + \frac{1}{2}a(t^2 - T^2) \right) \right] dt$$

expandindo e integrando

$$A_H = m \frac{X^2}{T} + \frac{1}{3}ma^2T^3 + \frac{2}{3}kaT^3$$

derivando em a (único parâmetro livre)

$$\frac{dA_H}{da} = \frac{2}{3}maT^3 + \frac{2}{3}kT^3 = 0 \Rightarrow a = \frac{-k}{m}$$

Substituindo a

$$A_{Hmin} = \frac{mX^2}{T} - \frac{k^2T^3}{3m}$$

- 0,5 pontos pela expressão da energia cinética: $E_c = \frac{1}{2}m \left(\frac{X}{T} + at \right)^2$

- 0,5 pontos pela expressão da energia potencial: $E_p(t) = k \left(\frac{X}{T}t + \frac{1}{2}a(t^2 - T^2) \right)$

- 0,5 pontos por chegar à ação: $A_H = \int_{-T}^T \left[\frac{1}{2}m \left(\frac{X}{T} + at \right)^2 - k \left(\frac{X}{T}t + \frac{1}{2}a(t^2 - T^2) \right) \right] dt$

- 0,5 pela expressão de a .

- 0,5 pela substituição de a e expressão correta. Se o valor de a , calculado antes estiver errado, mas faz a substituição e encontra outra expressão coerente, ganha a pontuação completa.

Parte B - Fermat vs. Maupertuis (4,0 pontos)

O princípio de Fermat afirma que

“O caminho seguido pela luz entre dois pontos é aquele para o qual o tempo do percurso é mínimo.”

O princípio de Fermat constitui uma das formulações mais elegantes da óptica geométrica: em vez de descrever diretamente as forças ou mecanismos microscópicos que governam a propagação da luz, ele estabelece um critério variacional para a trajetória efetivamente seguida entre dois pontos. Essa ideia antecipa na óptica geométrica o mesmo tipo de raciocínio que aparece na mecânica com o princípio da ação estacionária: a trajetória física emerge como aquela que torna estacionária uma grandeza integral associada ao percurso.



Figura 2: Pierre de Fermat magistrado e polímata francês do século XVII. Foi poeta e teve contribuições importantes para a matemática e física.

- B.1** Considere um fóton de frequência angular ω viajando entre dois pontos, P_1 e P_2 . 2,0pt
Para um elemento do “caminho da luz”, ds , mostre que o índice de refração, $n(\vec{r})$, do meio, varia segundo o gradiente da ação, a menos uma constante, isto é

$$A = C \int_{P_1}^{P_2} n(\vec{r}) ds.$$

Determine a expressão de C em função de ω e constantes fundamentais.

Gabarito:

B.1 - 2,0

$$A = \int_{P_1}^{P_2} p dx$$

$$p = \hbar k = \hbar \frac{n(\vec{r})}{c} \omega$$

daí

$$A = \int_{P_1}^{P_2} \hbar \frac{n(\vec{r})}{c} \omega dx = \boxed{\hbar \frac{\omega}{c} \int_{P_1}^{P_2} n(\vec{r}) dx}$$

onde $C = \frac{\hbar \omega}{c}$.

- 0,5 pontos por escrever a ação como $A = \int_{P_1}^{P_2} p dx$

- 0,5 pontos pela expressão de $p = \hbar k = \hbar \frac{n(\vec{r})}{c} \omega$.

- 0,5 ponto pela expressão correta da ação.

- 0,5 ponto pela expressão de C .

- B.2** Aplique o princípio de tempo mínimo (Fermat), ao caminho percorrido pela luz entre P_1 e P_2 e mostre que esse princípio é equivalente ao princípio da mínima ação. 2,0pt

Gabarito:

B.2 - 2,0

$$dx = v dt \Rightarrow dt = \frac{1}{v} dx = \frac{n(\vec{r})}{c} dx$$

então

$$t = \int_{P_1}^{P_2} \frac{n(\vec{r})}{c} dx \Rightarrow dt = d \int_{P_1}^{P_2} \frac{n(\vec{r})}{c} dx = 0$$

$$\boxed{\int_{P_1}^{P_2} n(\vec{r}) dx : cte.}$$

comparando com a ação, do item anterior, vemos que

$$dA = 0 = \frac{\hbar\omega}{c} d \int_{P_1}^{P_2} n(\vec{r}) dx \Rightarrow \boxed{\int_{P_1}^{P_2} n(\vec{r}) dx : cte.}$$

ou seja, o princípio de Fermat é equivalente ao princípio de Maupertuis, a menos uma constante dimensional.

- 0,5 ponto por escrever o tempo na forma: $t = \int_{P_1}^{P_2} \frac{n(\vec{r})}{c} dx$

- 0,75 ponto pela ação constante.

- 0,75 ponto pela comparação e equivalência.

Parte C - Ação “quântica” (4,0 pontos)

A teoria de de Broglie explicita o caráter dual da matéria: em certos fenômenos, partículas apresentam comportamento ondulatório e, portanto, assim como a luz, podem ser descritas como “viajando” pelo espaço ao “explorar” todos os caminhos possíveis entre dois pontos. Entre esses caminhos, porém, há um que se destaca por ser o mais “eficiente” no sentido variacional: aquele associado à ação mínima (ou, de modo mais preciso, à ação estacionária).

Em um experimento de interferência em fenda dupla, a probabilidade de detecção após o dispositivo é proporcional ao quadrado do módulo da soma das amplitudes associadas aos caminhos possíveis. À medida que adicionamos mais fendas, a probabilidade de a partícula atravessar tende a aumentar, o que sugere um raciocínio simples: no limite de infinitas fendas, o sistema se aproxima da situação em que não há fendas, isto é, não há restrições relevantes aos “caminhos” disponíveis. Assim, quando a partícula vai de A para B , faz sentido considerar uma família muito ampla de trajetórias, em geral associadas a diferentes distâncias, velocidades e, consequentemente, diferentes ações.

A partícula pode seguir qualquer caminho: cada trajetória deve contribuir para o resultado final. A cada caminho associa-se uma amplitude e uma fase. Considere, então, um caminho descrito por $\vec{r}_1(t)$ até $\vec{r}_2(t)$ no espaço-tempo, como ilustra a figura a seguir.

Um elemento desse caminho, Δr , percorrido em um tempo Δt , pode ser considerado uma reta. Podemos associar, a esse elemento, uma fase $\Delta\phi = k\Delta r - \frac{E}{\hbar}\Delta t$, em que k representa o número de onda associado à luz. Então, a amplitude do caminho todo pode ser expressa como

$$a \sim e^{i\Sigma\Delta\phi},$$

onde $\Delta\phi$ é a diferença de fase, ou seja, o ângulo percorrido pelo “fasor”, desde r_1 até r_2 .

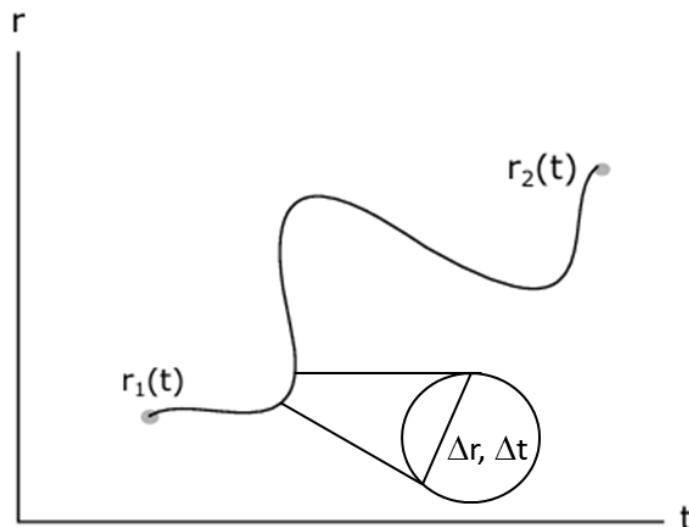


Figura 3: Caminho no espaço-tempo

C.1 Mostre que, no limite $\Delta r \rightarrow dr$ e $\Delta t \rightarrow dt$, a ação própria do caminho determina sua fase, ou seja

$$a \sim e^{iA/\hbar}$$

onde $A = \int L dt$.

2,5pt

Dica: Você precisa usar definições clássicas e/ou quânticas para essa partícula, sem considerar efeitos relativísticos.

Gabarito:

C.1 - 2,5

$$\Delta\phi = k\Delta r - \omega\Delta t = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r - 2\pi f\Delta t$$

Somando por todos os elementos...

$$a \sim e^{i\sum\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta r - 2\pi f\Delta t\right)}$$

usando $\lambda = \frac{h}{mv}$ e $f = \frac{E}{h}$

$$\begin{aligned} a &\sim e^{i\sum\left(\frac{2\pi mv}{h}dr - \frac{2\pi E}{h}dt\right)} = e^{i\sum\left(\frac{mv}{h}dr - \frac{E}{h}dt\right)} \\ e^{i\sum\left(\frac{mv}{h}dr - \frac{E}{h}dt\right)} &= e^{i\sum\left(mv\frac{dr}{dt} - E\right)\frac{dt}{h}} \Rightarrow e^{i\int\left(mv\frac{dr}{dt} - E\right)\frac{dt}{h}} \\ \frac{dr}{dt} &= v \Rightarrow a \sim e^{i\int\left(mv^2 - E\right)\frac{dt}{h}} \end{aligned}$$

$$E = \frac{mv^2}{2} + E_p \Rightarrow a \sim e^{i\int\left(mv^2 - \frac{mv^2}{2} - E_p\right)\frac{dt}{h}} = e^{i\int(E_c - E_p)\frac{dt}{h}}$$

onde E_c e E_p são as energias cinética e potencial, clássicas, respectivamente. Finalmente

$$E_c - E_p = L \Rightarrow \boxed{a \sim e^{\frac{iA}{\hbar}}}$$

onde $A = \int L dt$ é a ação clássica.

- 1,0 ponto pela expressão $a \sim e^{i\sum\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta r - 2\pi f\Delta t\right)}$.

- 1,0 ponto pela expressão $a \sim e^{i \int (E_c - E_p) \frac{dt}{\hbar}}$
- 0,5 ponto pela expressão final $a \sim e^{\frac{iA}{\hbar}}$

Em sistemas macroscópicos, A é muito maior em comparação com $\hbar$. Portanto, mesmo uma pequena (mas ainda macroscópica) mudança na ação para tal partícula causará grandes alterações na fase. Para tais partículas, muitas amplitudes de caminho se cancelam, tornando-as irrelevantes para o modo de movimento da partícula. O que realmente descobrimos na realidade é que apenas um caminho certo é seguido - a trajetória clássica.

A expressão anterior pode ser reescrita como

$$a(dr, dt) \sim e^{i2\pi(A/\hbar)} = e^{i\Delta\phi}$$

dessa forma a diferença de fases entre dois caminhos resulta na razão entre a ação clássica e a constante de Planck, $\Delta\phi \sim \frac{A}{\hbar}$.

- C.2** A partir do postulado de Bohr sobre a estabilidade do átomo, use o princípio de mínima ação de Maupertuis para mostrar que a constante de Planck é o “quantum de ação”, isto é, $A = nh$. 1,5pt

Gabarito:

C.2 - 1,5

- Postulado de Bohr sobre a quantização das órbitas do átomo de Hidrogênio

$$l = mvr = n\hbar, \quad A = mvs$$

para órbitas circulares...

$$s = 2\pi r \Rightarrow A = mv2\pi r = mvr(2\pi)$$

assim

$$A = l(2\pi) \rightarrow l = \frac{A}{2\pi} = n \frac{h}{2\pi}$$

finalmente

$$\boxed{A = nh}$$

- 1,0 ponto por estabelecer o postulado relacionado com a ação clássica: $A = mvr(2\pi)$
- 0,5 ponto pelo resultado final

Parte D - Intervalo invariante, ação relativística e termodinâmica (4,0 pontos)

Na relatividade restrita, a noção de intervalo entre dois eventos não é puramente espacial: ela envolve o entrelaçamento entre espaço e tempo em uma única grandeza geométrica, o intervalo invariante dS . Para dois eventos separados por um intervalo temporal dt e por uma separação espacial dr , define-se

$$dS = \sqrt{(cdt)^2 - (dr)^2},$$

quantidade que permanece a mesma para todos os observadores inerciais e, por isso, expressa de forma natural a estrutura do espaço-tempo.

A ação relativística pode ser escrita como

$$A = -m_0 c \int dS, \quad (1)$$

e o lagrangeano relativístico L_R é definido como a função tal que

$$A = \int L_R dt.$$

D.1 Determine uma expressão para o lagrangeano relativístico de uma partícula livre em função de m_0 , c e $\beta = v/c$. 1,0pt

Gabarito:

D.1 - 1,0

Definindo $\beta = v/c$

$$-m_0 c \int ds = \int L_R dt \Rightarrow \int L_R dt = -m_0 c \int c \sqrt{1 - \beta^2} dt = \int [-m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}] dt$$

Assim

$$L_R = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$$

- 0,5 ponto pela expressão em função do intervalo próprio.

- 0,5 ponto pela expressão final $L_R = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$.

D.2 Determine uma expressão aproximada de L_R para velocidades $v \ll c$ em função de m_0 , v e c . Mostre que a minimização da ação relativística nesse caso leva às mesmas trajetórias da aplicação do princípio da ação mínima da mecânica clássica. 1,0pt

Gabarito:

D.2 - 1,0

Para $v \ll c \dots$

$$L_R \rightarrow -m_0 c^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = -m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2}$$

O termo $\int (-m_0 c^2) dt$ não altera a ação, isto é, não afeta as trajetórias que minimizam a ação. Daí que o lagrangeano efetivo é

$$L_{Ref} = \frac{1}{2} m v^2$$

que é, exatamente, o lagrangeano da mecânica clássica para uma partícula livre.

- 0,5 ponto pela expressão de L_R .

- 0,5 ponto pela justificação baseada no L_{Ref} .

Imaginemos um corpo C, em repouso no referencial inercial R_0 , sendo aquecido por uma fonte externa. Em um segundo referencial inercial, R , o corpo C é observado em MRU, com velocidade $v = \beta c$. A quantidade de calor transferida para o corpo, no referencial R , é ΔQ , ver figura a seguir.

Como em R o corpo permanece com velocidade constante, uma quantidade de trabalho, W , deve ser realizada

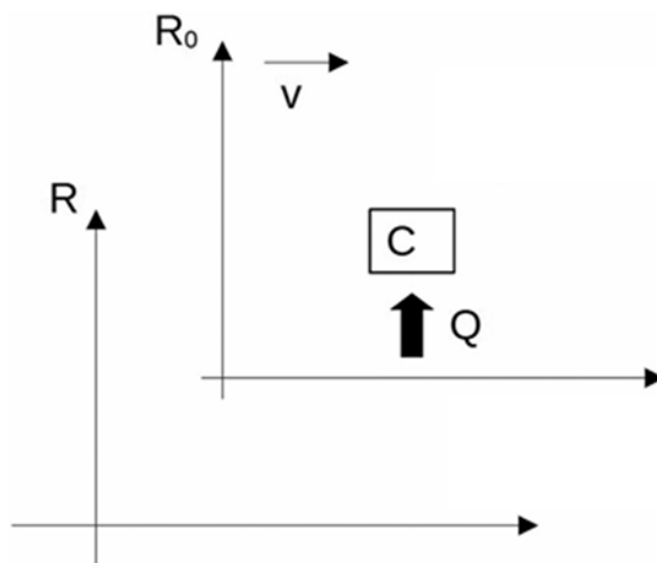


Figura 4: Sistema termodinâmico relativístico

sobre o corpo enquanto ele recebe calor (uma vez que sua massa está aumentando). Podemos escrever a energia do corpo, no sistema R , como

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Em outras palavras, o calor e o trabalho “absorvidos” pelo corpo C em movimento, em relação a R , faz aumentar sua energia interna, o que deve fazer com que sua massa em repouso aumente $M_0 \rightarrow M_0 + \Delta M_0$.

D.3 Use a primeira lei da termodinâmica para mostrar que, quando a massa própria do corpo varia em algum sistema de referência, com $v = \beta c$, seu lagrangiano varia na mesma medida que o calor absorvido pelo corpo, com sinal negativo, isto é 2,0pt

$$\Delta L_R = -\Delta Q.$$

Gabarito:

D.3 - 2,0

Da primeira lei da TD...

$$\frac{\Delta m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \Delta Q + W$$

$$\int dp = \Delta p = \frac{(m_0 + \Delta m_0)v}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \int F dt = \frac{W}{v}$$

Daí

$$W = \frac{\Delta m_0 v^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Substituindo na primeira lei...

$$\Delta Q = \frac{\Delta m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} (1 - \beta^2)$$

Assim, finalmente

$$\Delta Q = \Delta m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} = -\Delta L_R$$

- 0,5 ponto pela expressão da primeira lei da TD
- 1,0 ponto pela expressão do trabalho
- 0,5 ponto pela expressão final.

Parte E - Ação e geometria, espaço de fase estendido (4,0 pontos)

Até aqui, a ação foi tratada como uma grandeza integral cujo valor estacionário determina a trajetória física do sistema. Nesta última parte, daremos um passo adicional: reinterpretaremos a ação sob uma perspectiva geométrica.

Em vez de descrever a dinâmica apenas no espaço das posições $x(t)$, consideremos o chamado espaço de fase estendido, cujas coordenadas são (x, p, t) . Nesse espaço tridimensional, cada estado instantâneo do sistema é representado por um ponto, e a evolução temporal corresponde a uma curva parametrizada pelo tempo. Assim, a dinâmica deixa de ser apenas uma equação diferencial e passa a ser vista como um fluxo geométrico.

Para um sistema com uma coordenada x e momento p , o vetor tangente à trajetória no espaço de fase estendido é

$$\vec{u} = (u_x, u_p, u_t) = (\dot{x}, \dot{p}, \dot{t}).$$

Como $\dot{t} = 1$, podemos escrever

$$\vec{u} = (\dot{x}, \dot{p}, 1).$$

Esse vetor representa o campo de velocidades que governa a evolução do sistema nesse espaço ampliado. A análise de suas propriedades geométricas — em particular, sua divergência — nos permitirá revelar uma estrutura profunda.

Considere um sistema massa-mola ideal, de massa M e constante elástica k .

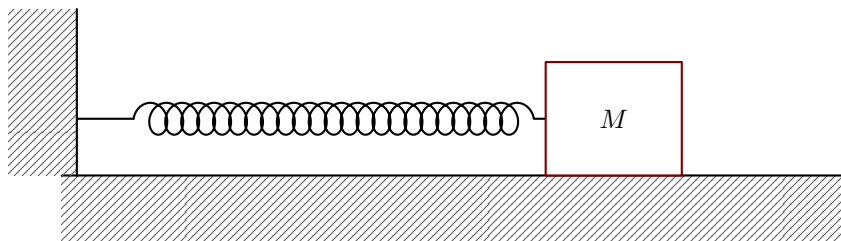


Figura 5: Sistema massa-mola com extremidade fixa na parede.

E.1 Mostre, para este sistema, que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0.$$

0,5pt

Dica: Nesse espaço de fase, as coordenadas x , p e t podem ser consideradas independentes entre si.

O operador $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial t} \right)$ é o operador vetorial “nabla”, cujas componentes são derivadas parciais em relação às coordenadas.

Gabarito:

E.1 - 0,5

$$\vec{u} = (u_x, u_p, u_t) = (\dot{x}, \dot{p}, 1) = \left(\frac{p}{m}, -kx, 1 \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{p}{m}, -kx, 1 \right) = 0$$

- 0,25 ponto pelas equações de movimento ($p = m\dot{x}$ e $\dot{p} = -kx$.)
- 0,25 pelo resultado final

Uma vez que o vetor $\vec{u}$ não tem convergência, ele pode ser convenientemente definido como

$$\vec{u} = -\vec{\nabla} \times \vec{\theta}, \quad (2)$$

em que $\vec{\theta}$ é uma quantidade física que investigaremos a seguir. Uma vez que $\vec{\theta}$ não é univocamente determinado pela equação 2, podemos tomar a componente θ_p como sendo identicamente nula.

E.2 Considerando um sistema massa-mola ideal, encontre as outras duas componentes de $\vec{\theta}$: θ_x e θ_t . O que representam fisicamente cada componente de $\vec{\theta}$? 2,5pt

Gabarito:

E.2 - 2,5

$$\nabla \times \vec{\theta} = (\partial_p \theta_t - \partial_t \theta_p, \partial_t \theta_x - \partial_x \theta_t, \partial_x \theta_p - \partial_p \theta_x) = -\vec{u} = \left(-\frac{p}{m}, kx, -1\right)$$

Escolhendo $\theta_p = 0$, da terceira componente do produto vetorial

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial p} = 1$$

integrando em p

$$\theta_x = p + cte_1.$$

ou $\theta_x = p$, a menos uma constante. Da segunda componente do produto vetorial

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial t} - \frac{\partial \theta_t}{\partial x} = kx$$

Substituindo θ_x e integrando em x

$$\theta_t = -\frac{kx^2}{2} + g$$

Da primeira componente do produto vetorial, e integrando em p

$$g = -\frac{p^2}{2m} + cte_2.$$

Substituindo na expressão de θ_t

$$\theta_t = -\frac{kx^2}{2} - \frac{p^2}{2m} = -E_p - E_c = -E$$

a menos a constante. As componentes θ_x e θ_t representam o momento linear e a energia do sistema, com sinal negativo, respectivamente.

- 0,5 ponto por chegar à expressão de θ_x

- 0,5 ponto por indicar que representa o momento linear.

- 1,0 por chegar à expressão de θ_t

- 0,5 ponto por indicar que representa a energia.

Podemos definir, para qualquer trajetória Γ no espaço de fase estendido, uma circulação

$$C = \int_{\Gamma} \vec{\theta} \cdot d\vec{\gamma},$$

onde $d\vec{\gamma} = (dx, dp, dt)$ é um elemento de caminho no espaço de fase.

E.3 Escreva uma expressão para a circulação C em função do lagrangeano L_H do sistema. 1,0pt
Interprete o resultado.

Gabarito:

E.3 - 1,0

$$C = \int_{\Gamma} (p, 0, -E_c - E_p) \cdot (dq, dp, dt) = \int_{t_i}^{t_f} (p, 0, -E_c - E_p) \cdot (\dot{q}, \dot{p}, 1) dt$$

$$C = \int_{t_i}^{t_f} (p\dot{q} - E_c - E_p) dt = \int_{t_i}^{t_f} (E_c - E_p) dt = \boxed{\int_{t_i}^{t_f} L_H dt}$$

A circulação

$$C = \int_{\Gamma} \vec{\theta} \cdot d\vec{\gamma} = \int_{t_i}^{t_f} L_H dt,$$

é a ação de Hamilton do sistema.

- 0,5 ponto por escrever a circulação como uma integral no tempo do produto escalar
- 0,25 ponto por executar o produto escalar e chegar a $C = \int_{t_i}^{t_f} (E_c - E_p) dt$
- 0,25 ponto pelo resultado e interpretação

Q2 - Investigando Saturno (20 pontos)

Saturno é o segundo maior planeta do Sistema Solar, superado apenas por Júpiter em tamanho e massa. Ele é conhecido por seu impressionante sistema de anéis e por possuir dezenas de luas, incluindo Titã, uma das maiores do sistema solar. Saturno está localizado a uma distância média de aproximadamente $1,43 \times 10^{12}$ m do Sol.

A massa do planeta é dada por $M_S = 5,68 \times 10^{26}$ kg e seu raio médio por $R_S = 5,82 \times 10^7$ m. Para fins de comparação, a massa da Terra é $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg, seu raio é $R_T = 6,4 \cdot 10^6$ m e sua distância média até o Sol vale $1 \text{ UA} = 1,5 \cdot 10^{11}$ m. Esse problema é dividido em 4 partes, nas quais você investigará diferentes aspectos físicos desse planeta e que tipos de fases exóticas da matéria ele exibe em seu interior.

Dados:

Massa do elétron $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg

Constante de Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s

Constante de Boltzmann $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K.

Constante da gravitação universal $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$ N.m².kg⁻².

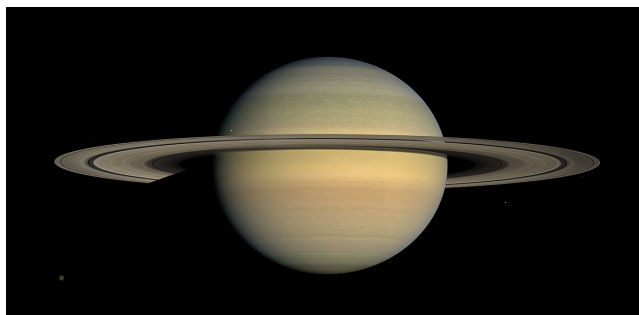


Figura 6: Foto do planeta Saturno.

Parte A – Parâmetros físicos de Saturno (3,0 pontos)

As características dos corpos celestes na astronomia quase sempre não são aferidas diretamente, mas inferidas por estimativas físicas ou medidas indiretas. Nessa parte da questão, realizaremos inferências a respeito do estado da matéria de Saturno.

Os planetas que compõem o sistema solar são divididos entre planetas rochosos ou telúricos (compostos de matéria no estado sólido) e planetas gasosos ou jovianos (compostos de matéria no estado gasoso).

- A.1** Calcule as densidades médias de massa da Terra (ρ_T) e de Saturno (ρ_S) e classifique os dois planetas como rochosos ou gasosos. 1,0pt

Gabarito:

A1. A densidade média é dada por $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$.

Para a Terra:

$$\rho_T = \frac{6,0 \times 10^{24}}{\frac{4}{3}\pi(6,4 \times 10^6)^3} \approx 5520 \text{ kg/m}^3.$$

Para Saturno:

$$\rho_S = \frac{5,68 \times 10^{26}}{\frac{4}{3}\pi(5,82 \times 10^7)^3} \approx 690 \text{ kg/m}^3.$$

Como a densidade da água é $\approx 1000 \text{ kg/m}^3$, Saturno é menos denso que a água, o que indica que é composto majoritariamente por gases, enquanto a Terra, mais densa, é rochosa.

Marking Scheme:

- 0,5 pt por ambos os valores numéricos corretos.
- 0,5 pt Inferência correta e devidamente justificada.

A.2 Assumindo que a Terra e Saturno encontram-se em equilíbrio termodinâmico, estime o valor numérico da temperatura média na superfície de Saturno em K. 2,0pt

Gabarito:

A2. Supondo que Saturno e a Terra estejam em equilíbrio térmico com a radiação solar, podemos aplicar o balanço entre a potência absorvida e reemitida pelo planeta.

A potência solar recebida por unidade de área na órbita da Terra é:

$$I_T = \frac{L_{\odot}}{4\pi(1 \text{ UA})^2}$$

A intensidade em Saturno, a uma distância $d_S = 1,43 \times 10^{12} \text{ m}$, é:

$$I_S = \frac{L_{\odot}}{4\pi d_S^2}$$

A razão entre essas intensidades é:

$$\frac{I_S}{I_T} = \left(\frac{1 \text{ UA}}{d_S}\right)^2 \approx \left(\frac{1,5 \times 10^{11}}{1,43 \times 10^{12}}\right)^2 \approx (0,105)^2 \approx 0,011$$

A potência total absorvida por Saturno é proporcional à sua área de seção reta (πR_S^2), enquanto a potência que ele reemite por efeito térmico é proporcional à sua área superficial total ($4\pi R_S^2$), e à quarta potência de sua temperatura (lei de Stefan-Boltzmann):

$$\pi R_S^2 I_S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4 \Rightarrow T_S = \left(\frac{I_S}{4\sigma}\right)^{1/4}$$

Fazendo a razão com a temperatura da Terra:

$$\left(\frac{T_S}{T_T}\right)^4 = \frac{I_S}{I_T} = \left(\frac{1 \text{ UA}}{d_S}\right)^2 \Rightarrow \frac{T_S}{T_T} = \left(\frac{1 \text{ UA}}{d_S}\right)^{1/2}$$

Estimando uma temperatura média da Terra por volta de $T_T = 288 \text{ K}$, chegamos ao resultado desejado:

$$T_S = T_T \cdot \sqrt{\frac{1,5 \times 10^{11}}{1,43 \times 10^{12}}} \approx 288 \cdot \sqrt{0,105} \approx 288 \cdot 0,324 \approx 93 \text{ K}$$

Marking Scheme:

- 0,5 pt por condição de equilíbrio térmico considerando a irradiação recebida e reemitida.
- 0,5 pt por relações de intensidades luminosas.
- 0,5 pt por efeito do raio do planeta na reirradiação de energia.
- 0,5 pt por estimativa correta entre 88 e 98 K.

Parte B – Equilíbrio hidrostático clássico (5,0 pontos)

Resultados observacionais apontam que a composição de Saturno é dominada por hidrogênio molecular (H_2) e hélio, com traços de outros elementos mais pesados.

Por simplicidade, assuma nos itens a seguir que a densidade de massa ρ_S de Saturno permaneça constante em todo o seu interior, exceto quando explicitamente solicitado o contrário.

- B.1** Assumindo que sua massa esteja uniformemente distribuída, deduza a expressão da variação da pressão $\frac{dP}{dr}$ no interior do planeta em função da densidade de massa ρ_S , constante da gravitação universal G e coordenada radial r . 3,0pt

Gabarito:

B1. Para uma esfera de densidade constante ρ_S , a massa contida dentro de um raio r é:

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_S$$

Pelo teorema de Gauss (ou Lei da Gravitação Universal), o campo gravitacional em um ponto a uma distância r do centro é:

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} = \frac{G \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_S}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G \rho_S r$$

Para encontrar a variação da pressão com a profundidade, consideramos uma casca esférica de espessura dr , área A e densidade ρ_S . O equilíbrio de forças verticais (segunda lei de Newton para o elemento de volume) implica:

$$P(r)A - P(r + dr)A = \rho_S A dr \cdot g(r) \Rightarrow -\frac{dP}{dr} = \rho_S g(r)$$

Substituindo $g(r)$ da expressão anterior:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho_S \cdot \left(\frac{4}{3}\pi G \rho_S r \right) = -\frac{4}{3}\pi G \rho_S^2 r$$

Marking Scheme:

- 1,0 pt por expressão de $g(r)$.
- 1,0 pt por equilíbrio de forças em uma porção de volume infinitesimal.
- 1,0 pt por expressão final desejada.

- B.2** Determine uma expressão para a pressão no centro do planeta P_c em termos de G , M_S e R_S e calcule o seu resultado numérico. 2,0pt

Gabarito:

B2. Integrando de $r = 0$ até R_S :

$$P_c = \int_0^{R_S} \frac{4}{3}\pi G \rho_S^2 r dr = \frac{2}{3}\pi G \rho_S^2 R_S^2$$

Substituindo $\rho_S = \frac{M_S}{\frac{4}{3}\pi R_S^3}$:

$$P_c = \frac{3GM_S^2}{8\pi R_S^4}$$

Usando os valores:

$$P_c = \frac{3 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (5,68 \cdot 10^{26})^2}{8\pi(5,82 \cdot 10^7)^4} \approx 3,6 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

Marking Scheme:

- 1,0 pt expressão literal correta.
- 1,0 pt valor numérico correto.

Parte C – Fase metálica do hidrogênio (5,0 pontos)

Sob as condições extremas de pressão e temperatura presentes em seu interior, o hidrogênio molecular (H_2) pode passar por uma transição de fase, transformando-se em um estado metálico. Essa fase metálica do hidrogênio foi objeto de intensas pesquisas por constituir um estado extremo da matéria e por suas possíveis implicações na física de planetas gigantes.

Considere um modelo simplificado onde o hidrogênio passa da fase molecular para uma fase metálica composta por átomos ionizados. A energia de ligação de uma molécula de H_2 é de aproximadamente 436 kJ/mol, esse é um nível de energia importante para estimarmos a partir de qual pressão pode-se observar uma transição entre hidrogênio molecular e metálico.

Diferentemente dos metais com os quais estamos habituados, essa fase metálica do hidrogênio é um fluido líquido. Apesar disso, assuma um modelo simplificado no qual os íons de hidrogênio (prótons) formam uma rede regular cúbica simples e os elétrons se comportam como um gás livre.

- C.1** Obtenha uma expressão que estime a energia E média dos elétrons da fase metálica em função da densidade volumétrica de elétrons n , da massa do elétron m_e e da constante de Planck h . Não se preocupe com fatores numéricos. 2,0pt

Gabarito:

C1. Para estimar a energia média dos elétrons na fase metálica, podemos usar uma análise dimensional com as grandezas relevantes:

- h : constante de Planck, com dimensões de ação $[h] = \text{J} \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$
- m_e : massa do elétron, com $[m_e] = \text{kg}$
- n : densidade de partículas, com $[n] = \text{m}^{-3}$

A densidade numérica define uma distância média entre elétrons $d \approx n^{-1/3}$, e pelo princípio da incerteza de Heisenberg, o momento típico de confinamento é:

$$p \approx \frac{h}{d} \approx h \cdot n^{1/3}$$

A energia cinética média associada a esse momento é:

$$E \approx \frac{p^2}{2m_e} \approx \frac{h^2 n^{2/3}}{2m_e}$$

Assim, a ordem de grandeza da energia média é:

$$E \approx \frac{h^2 n^{2/3}}{m_e}$$

Uma expressão idêntica pode ser obtida por argumentos de análise dimensional.

Marking Scheme:

- 1,0 pt — Argumentos de análise dimensional ou uso coerente do princípio da incerteza.
- 1,0 pt — obtenção da expressão final $E \approx \frac{h^2 n^{2/3}}{m_e}$. Fatores numéricos não serão considerados.

Para a fase metálica ser estável, a energia de interação eletrônica E por partícula da fase metálica deve ser comparável à energia de interação observada na fase molecular.

- C.2** Estime a densidade crítica n_C de elétrons por volume a partir da qual deve ocorrer uma transição de fase entre hidrogênio molecular e hidrogênio metálico. 1,0pt

Gabarito:

C2. Energia de dissociação:

$$436 \text{ kJ/mol} = \frac{436 \times 10^3}{6,022 \times 10^{23}} = 7,24 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 4,53 \text{ eV}$$

Igualando à energia média:

$$\frac{h^2}{2m_e} n^{2/3} \approx 4,53 \text{ eV}$$

$$n \approx 5 \times 10^{27} \text{ m}^{-3}$$

Marking Scheme:

- 1,0 pt — Ordem de grandeza de n_C entre 27 e 29.

No interior de planetas como Saturno, a temperatura pode ser bastante elevada, chegando a atingir valores como $T_{in}=10.000 \text{ K}$. No item a seguir você pode assumir que $\rho(r)$ pode apresentar variações no interior de Saturno, mas que os resultados obtidos na parte B constituem uma aproximação aceitável da pressão no interior do planeta.

- C.3** Utilizando a aproximação de gases perfeitos, estime se a densidade crítica n_C é atingida nas regiões profundas de Saturno. 2,0pt

Gabarito:

C3. Para avaliar se a densidade crítica $n_C \approx 10^{28} \text{ m}^{-3}$ é atingida nas regiões profundas de Saturno, usamos a equação de estado dos gases ideais:

$$PV = Nk_B T \Rightarrow n = \frac{P}{k_B T}$$

Nas camadas internas de Saturno, estima-se que a pressão atinja valores da ordem de $P \approx 3,6 \times 10^{11} \text{ Pa}$. A temperatura central pode chegar a cerca de $T \approx 1 \times 10^4 \text{ K}$. Substituindo os valores numéricos fornecidos:

$$n = \frac{3,6 \times 10^{11}}{1,38 \times 10^{-23} \cdot 1 \times 10^4} \approx 2,6 \times 10^{30} \text{ m}^{-3}$$

Esse valor supera o limiar estimado n_C em duas ordens de grandeza, mostrando que a densidade crítica para a transição de fase pode ser atingida no interior de Saturno.

Marking Scheme:

- 1,0 pt — Uso correto da equação de gases ideais e estimativa de n com grandeza realista.
- 1,0 pt — Conclusão bem justificada com base em condições físicas internas de Saturno.

Parte D – Efeitos quânticos no equilíbrio hidrostático (7,0 pontos)

Segundo a teoria cinética dos gases clássica, a pressão dos gases em um modelo hidrostático é oriunda da agitação térmica. No entanto, quando a matéria se torna muito densa, surge um efeito conhecido como pressão de Fermi. Qualitativamente, é possível interpretar esse resultado como um efeito macroscópico emergente do princípio da exclusão de Pauli.

O limite em que esse efeito torna-se relevante pode ser estimado comparando o comprimento de onda de de Broglie com a distância média entre as partículas.

- D.1** Estime uma expressão para o comprimento de onda térmico de de Broglie de um elétron à temperatura T_S . Forneça sua resposta em termos de h , m_e e T_S . 2,0pt

Gabarito:

D1. O comprimento de onda térmico de de Broglie de uma partícula é definido a partir do momento médio térmico associado à temperatura T_S . A energia cinética média de um elétron em equilíbrio térmico é:

$$E_{cin} \approx \frac{1}{2} m_e v_{th}^2 \approx \frac{3}{2} k_B T_S \Rightarrow v_{th} \approx \sqrt{\frac{3k_B T_S}{m_e}}$$

O momento térmico médio é então:

$$p_{th} \approx m_e v_{th} \approx \sqrt{3m_e k_B T_S}$$

O comprimento de onda térmico de de Broglie associado a esse momento é:

$$\lambda_{th} = \frac{h}{p_{th}} \approx \frac{h}{\sqrt{3m_e k_B T_S}}$$

Marking Scheme:

- 1,0 pt — Estimativa da velocidade térmica $v_{th} \approx \sqrt{k_B T/m}$.
- 0,5 pt — Comprimento de onda de de Broglie.
- 0,5 pt — Apresentação da expressão da estimativa correta exceto por fatores numéricos.

Soluções por análise dimensional serão aceitas.

- D.2** Estime a densidade eletrônica crítica n_Q a partir da qual os efeitos quânticos tornam-se relevantes para o equilíbrio hidrostático. Discuta se esse valor é atingido na regiões interna de Saturno. 2,0pt

Gabarito:

D2. Os efeitos quânticos tornam-se relevantes quando o comprimento de onda térmico de de Broglie dos elétrons λ_{th} torna-se comparável à distância média entre partículas $d \approx n^{-1/3}$. Isso define a densidade crítica n_Q pela condição:

$$\lambda_{th} \approx n^{-1/3} \Rightarrow n_Q \approx \left(\frac{1}{\lambda_{th}} \right)^3$$

Com a expressão obtida anteriormente para o comprimento de onda térmico:

$$\lambda_{th} = \frac{h}{\sqrt{3\pi m_e k_B T}} \Rightarrow n_Q \approx \left(\frac{\sqrt{3\pi m_e k_B T}}{h} \right)^3$$

Usando $T \approx 100$ K para a atmosfera superior de Saturno:

$$n_Q \approx \left(\frac{\sqrt{2\pi \cdot 9,1 \times 10^{-31} \cdot 1,38 \times 10^{-23} \cdot 100}}{6,63 \times 10^{-34}} \right)^3 \approx 3 \times 10^{30} \text{ m}^{-3}$$

Marking Scheme:

- 1,0 pt — Dedução correta da condição $\lambda_{th} \approx n^{-1/3}$ e da expressão de n_Q .
- 1,0 pt — Discussão qualitativa sobre onde essa densidade é atingida em Saturno.

D.3 Estime uma expressão da pressão de Fermi P_F em função das constantes físicas fornecidas no problema. 3,0pt

Gabarito:

D3. Para estimar a pressão de Fermi, partimos da energia média por partícula obtida no item **C1**:

$$\frac{E}{N} \approx \frac{h^2 n^{2/3}}{m_e}$$

Sabendo que a densidade numérica é dada por $n = \frac{N}{V}$, podemos expressar a energia total E do sistema em função do número total de partículas N e do volume V :

$$E = N \cdot \left(\frac{h^2}{m_e} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} \right) = \frac{h^2 N^{5/3}}{m_e V^{2/3}}$$

A pressão hidrostática pode ser calculada considerando a variação da energia total em relação ao volume do sistema:

$$P_F = -\frac{dE}{dV}$$

Derivando a expressão de E em relação a V :

$$P_F = -\frac{d}{dV} \left(\frac{h^2 N^{5/3}}{m_e} V^{-2/3} \right) = \frac{2}{3} \frac{h^2 N^{5/3}}{m_e} V^{-5/3}$$

Reescrevendo a expressão em termos da densidade $n = N/V$, obtemos a relação final:

$$P_F \approx \frac{h^2}{m_e} n^{5/3}$$

Marking Scheme:

- 1,0 pt — Expressão da energia total E em função de N e V .
- 1,0 pt — Uso da relação termodinâmica $P = -dE/dV$.

- 1,0 pt — Obtenção da dependência final com $n^{5/3}$.

Soluções por análise dimensional podem receber pontuação integral.

Q3 - Expoentes Críticos e Transições de Fase (20 pontos)

Neste problema, iremos analisar transições de fase de alguns sistemas e como algumas quantias como magnetização, susceptibilidade magnética, e capacidade térmica dependem da temperatura perto da temperatura crítica da transição de fase. Veremos que algumas dessas quantias apresentam divergências e descontinuidades perto de T_C , descritos por um conjunto de *expoentes críticos* e que esse comportamento é similar em diferentes modelos.

Na **Parte A**, analisaremos o *Modelo de Ising*, e obteremos a que temperatura crítica T_C o modelo passa a ter magnetização espontânea. Na **Parte B** e **Parte C** calcularemos expoentes críticos para quantias como susceptibilidade e magnetização.

Independentemente, na **Parte D** consideramos um modelo generalizado para magnetização e derivaremos relações universais entre expoentes críticos. Finalmente, na **Parte E**, consideramos o modelo de uma transição líquido-gás descrito pela equação de *Van der Waals*, e veremos que ele também apresenta expoentes críticos.

Parte A — Modelo de Ising (5,0 pontos)

Considere um sistema descrito pelo *Modelo de Ising*, com dipolos magnéticos ao longo de uma linha. Seja $\vec{m}$, o momento de dipolo de cada ímã. Assuma que cada dipolo é um *spin* tal que ele aponta ou na direção $+\hat{y}$ ou $-\hat{y}$, de forma que caracterizaremos cada dipolo i com o spin dele s_i , tal que o momento de dipolo é $\vec{m}_i = m_0 s_i \hat{y}$, onde $s_i = \pm 1$ e m_0 uma constante.

Considere que o sistema todo está imerso em um campo magnético $\vec{B} = \frac{h}{m_0} \hat{y}$, e que cada dipolo $\vec{m}_i$ interage com seu “próximo” vizinho adjacente $\vec{m}_{i+1}$, tal que a energia de interação dado um par de dipolos $\vec{m}_i = m_0 s_i \hat{y}$ e $\vec{m}_{i+1} = m_0 s_{i+1} \hat{y}$ é:

$$E_{i,i+1} = -J s_i s_{i+1}, \quad (3)$$

em que J é uma constante física conhecida. No restante deste problema assuma que a cadeia de dipolos é muito grande tal que podemos desprezar efeitos de borda, e que no total temos N dipolos.

- A.1.** Escreva uma expressão para a energia total do sistema, como uma soma sobre todos os dipolos magnéticos. Coloque sua resposta em função de h , J e os spins individuais. 0,50pt

Considere agora que o sistema está em equilíbrio térmico à temperatura T , e a constante de Boltzmann é k_B . Vamos descrever este sistema sobre a *aproximação de campo médio*. Nessa aproximação, se assume que flutuações de cada dipolo são pequenas. Em particular se escreve que:

$$s_i = s + \delta s_i \text{ com } \delta s_i \ll s \quad (4)$$

Note que isso claramente *viola* o fato que assumimos que $s_i = \pm 1$ previamente. No entanto, assumir isso permite que desenvolvamos nossa teoria de maneira relativamente simples e encontremos resultados relevantes. Portanto, para o resto da prova vamos fazer esta aproximação.

- A.2.** Dado que $\delta s_i \ll s$, encontre uma expressão para o produto $s_i s_j$, que seja *linear* em s_i e s_j , desprezando fatores de $\delta s_i \delta s_j$, em função de s , s_i , e s_j . 0,50pt

Dada a expressão para $s_i s_j$ linear em s_i e s_j , podemos agora encontrar uma expressão linear nos valores de s_i para a energia total do sistema.

A.3. Encontre uma expressão para a energia total do sistema na forma

0,50pt

$$E = c_1 + c_2 \sum_i s_i.$$

Determine c_1 e c_2 em função de h , J , s e N .

A.4. Nessa aproximação, cada spin sofre um campo magnético efetivo $B_e = \frac{h_e}{m_0}$. Encontre o valor de h_e em função de h , J e s .

0,50pt

Considere a partir de agora que $s = \langle s_i \rangle$ corresponde ao valor médio de s_i .

A.5. Tratando o campo efetivo h_e encontrado no item anterior como uma constante conhecida, aplique a distribuição de Boltzmann, e obtenha uma expressão para momento de dipolo médio s , em função de h_e , k_B e T .

0,50pt

Depois, usando seu resultado de **A.4** para h_e em função de s , encontre uma expressão que s deve satisfazer.

Dica: É útil colocar a expressão final desse item em função da função tangente hiperbólica

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Este sistema apresenta magnetização espontânea, onde, abaixo de uma certa temperatura crítica T_C , podemos ter magnetização média $m = m_0 s \neq 0$ mesmo com campo externo $h = 0$.

A.6. Encontre a temperatura crítica T_C abaixo da qual observa-se magnetização espontânea. Apresente sua resposta em termos de J e k_B .

1,0pt

A.7. Encontre s para $T > T_C$ com $h = 0$.

1,0pt

Para $T < T_C$, porém com $T \approx T_C$ e $h = 0$, s possui a seguinte forma:

$$s = M_0 \cdot T \cdot (T_C - T)^\beta, \quad (5)$$

com M_0 e β constantes.

A.8. Encontre M_0 e β em função de T_C e fatores numéricos.

0,50pt

Dica: Pode ser útil que

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} \text{ para } x \ll 1.$$

A constante β é denominada o expoente crítico da magnetização. Ao longo deste problema, iremos ver que outras quantidades termodinâmicas desse sistema também apresentam expoentes críticos similares, e que esse comportamento é característico de algumas transições de fase.

Parte B - Susceptibilidade magnética (3,0 pontos)

Nesta parte do problema, iremos analisar a susceptibilidade magnética do sistema, e que ela também possui expoentes críticos com a temperatura. Em particular, a susceptibilidade mede a resposta da magnetização ao campo externo:

$$\chi = \left. \frac{\partial s}{\partial h} \right|_{h \rightarrow 0} \quad (6)$$

B.1. Derive uma expressão para a suscetibilidade magnética χ em função da temperatura T , s , k_B e J . 1,0pt

Dica: Pode ser útil escrever sua resposta em termos de

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{com} \quad \frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

Quando T se aproxima da temperatura crítica T_C , a suscetibilidade magnética diverge. Agora estudaremos como χ diverge conforme T se aproxima de T_C .

Defina χ_+ a suscetibilidade para $T > T_C$, e χ_- para $T < T_C$. Veremos que a suscetibilidade tem comportamentos diferentes para cada regime. Vamos mostrar que a suscetibilidade para $T \approx T_C$ pode ser escrita da forma:

$$\chi_{\pm} = \frac{A_{\pm}}{|T - T_C|^{\gamma_{\pm}}} \quad (7)$$

Para constantes $A_{\pm}$ e $\gamma_{\pm}$, que podem depender se $T > T_C$ ou $T < T_C$. Nas partes **B.2** e **B.3**, assumamos que T é muito próximo de T_C .

B.2. Encontre A_+ e γ_+ , as constantes para $T > T_C$. 1,0pt

B.3. Encontre A_- e γ_- , constantes para $T < T_C$, e a razão A_+/A_- . 1,0pt

Dica: Pode ser útil que

$$\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2} \text{ para } x \ll 1 \text{ e que } (1+x)^n \approx 1 + nx \text{ para } nx \ll 1$$

A constante γ é denominada o expoente crítico da suscetibilidade.

Parte C - Isoterma Crítica (3,0 pontos)

Agora, vamos analisar o sistema na isoterma crítica, onde $T = T_C$. Nessa temperatura, pode-se mostrar que a magnetização média $m(h) = m_0 s(h)$ é proporcional a $h^{1/\delta}$, para uma constante δ .

C.1. Para $T = T_C$ e h não nulo e pequeno, encontre $s(h)$, e o expoente δ . 1,0pt

Similarmente a γ , δ também é um expoente crítico do sistema. Agora, vamos brevemente analisar o comportamento da capacidade térmica do sistema com $h = 0$.

C.2. Encontre a capacidade térmica média de cada dipolo $C(T)$ em função de T com T perto de T_C , e o comportamento em T_C . 1,0pt

C.3. Esboce $C(T)$, indicando pontos notáveis no seu esboço, e o comportamento em $T = T_C$. Considere o intervalo de temperaturas entre 0 e $2T_C$. 1,0pt

Parte D — Hipótese de Escala (3,0 pontos)

Neste parte iremos considerar um modelo generalizado e derivar relações análogas entre os expoentes críticos aos encontrados nas partes anteriores. Vamos definir a temperatura reduzida t , como a distância normalizada

a temperatura crítica T_C , da seguinte forma:

$$t = \frac{T - T_C}{T_C}. \quad (8)$$

E que a magnetização média s , definida na parte **A**, pode ser escrita de uma forma geral como:

$$s(t, h) = |t|^{\beta'} \mathcal{M}\left(\frac{h}{|t|^{\beta'\delta'}}\right), \quad (9)$$

para uma função $\mathcal{M}(x)$ e constantes $\beta' > 0, \delta' > 0$ conhecidas.

D.1. A partir da equação 9, argumente como $s(t, h)$ deve depender de h no limite $t \rightarrow 0$, ignorando fatores multiplicativos constantes. 1,0pt

D.2. Para $h \rightarrow 0$, indique o tipo de dependência entre $\chi(t)$ e t , definido na parte **B**. 1,0pt

D.3. Compare o resultado de **D.2** com a relação da equação 7, e relacione γ com β', δ' . 1,0pt

Essa relação entre expoentes críticos é denominada a *relação de Widom*.

Parte E — Criticalidade de Van der Walls (6,0 pontos)

Nesta parte do problema, estudaremos o modelo de Van der Walls, que pode ser usado para descrever uma transição de fase líquido-gás de uma substância. A equação que descreve esse sistema é:

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad (10)$$

em que v é o volume molar, P a pressão, T a temperatura, R a constante dos gases, e a, b constantes determinadas experimentalmente para cada tipo de gás. Nesta parte da questão iremos ver que este modelo apresenta expoentes críticos similares perto de sua temperatura, pressão, e volume críticos. Os pontos críticos são definidos tal que em T_C, P_C, v_C , o modelo apresenta um ponto de inflexão, onde:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = 0 \text{ e } \left(\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}\right)_T = 0 \quad (11)$$

E.1. Encontre os pontos críticos da equação de Van der Walls, v_C, P_C, T_C . Deixe sua resposta em termos de a, b e R . 2,0pt

Definindo a temperatura, pressão e volume molar reduzidos:

$$t = \frac{T - T_C}{T_C}, \quad p = \frac{P - P_C}{P_C}, \quad \text{e} \quad \phi = \frac{v - v_C}{v_C} \quad (12)$$

Pode se obter uma equação da forma:

$$p = A \cdot t - B \cdot t \cdot \phi - C \cdot \phi^3$$

Para constantes A, B e C .

E.2. Expandindo a equação de estado para a temperatura, pressão, e volume reduzidos até a primeira ordem em t , e terceira em ϕ , obtenha as constantes A, B, C . 1,0pt

Dica: Pode ser útil que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3, \text{ e que } \frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3, \quad (13)$$

para $x \ll 1$.

Em $T = T_C$, a relação entre de $\phi(p)$ define o expoente δ , similarmente como na parte **C**, da forma $\phi(p) \propto p^{1/\delta}$. Novamente assuma que ϕ, t, p são pequenos.

E.3. Encontre δ para a equação de Van der Waals. 1,0pt

Agora, vamos analisar o análogo da susceptibilidade magnética para o sistema, neste caso a *compressibilidade isotérmica*, definida como:

$$\kappa = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T. \quad (14)$$

Assim como χ na **Parte B**, $\kappa \propto \frac{1}{t^\gamma}$ perto da temperatura crítica.

E.4. Encontre uma expressão de κ em função de P_C e t perto do ponto crítico. Como κ diverge com $t > 0$, determine o expoente γ . 1,0pt

Para $t < 0$, existem duas fases estáveis com volumes molares reduzidos diferentes - uma líquida a ϕ_l e uma gasosa a ϕ_g . A condição de coexistência é que ambas possuem um mesmo valor de pressão e temperatura. Pode-se assumir que esse limite é perto das condições de pressão, volume, e temperatura crítica, e neste limite $\phi_g = -\phi_l$.

E.5. No regime de coexistência perto dos pontos críticos, encontre $\phi_g - \phi_l$ em função da temperatura reduzida $t < 0$. 1,0pt

Gabarito:

A.1

A energia total pode ser dada por:

$$E = - \sum_i \vec{B} \cdot \vec{m}_i + \sum_i E_{i,i+1} = -h \sum_i s_i - J \sum_i s_i \cdot s_{i+1} \quad (15)$$

Marking Scheme:

- +0,2 pt - Expressão correta da energia de um dipolo $\vec{B} \cdot \vec{m}_i$
- +0,3 pt - Expressão correta para a energia total em função de uma soma sobre dipolos

A.2

Dado $s_i = s + \delta s_i$, temos:

$$s_i s_j = s^2 + s \delta s_i + s \delta s_j + \delta s_i \delta s_j \approx s^2 + s((s_i - s) + (s_j - s)) = s(s_i + s_j) - s^2 \quad (16)$$

Marking Scheme:

- +0,25 pt - Expressão correta para o produto de $s_i s_j$ desprezando fatores quadráticos de $\delta s_i \delta s_j$
- +0,25 pt - Expressão correta para $s_i s_j$ linear nos termos s_i e s_j .

A.3

A energia total é assim:

$$E = -h \sum_i s_i - J \sum_i s_i \cdot s_{i+1} = -h \sum_i s_i - J \sum_i s(s_i + s_{i+1}) - s^2 = Js^2 \sum_i 1 - h \sum_i s_i - 2Js \sum_i s_i \quad (17)$$

Note que acima usamos que $\sum_i s_i = \sum_i s_{i+1}$.

$$E = +NJs^2 - (h + 2Js) \sum_i s_i \quad (18)$$

Logo $c_1 = NJs^2$ e $c_2 = -(h + 2Js)$

Marking Scheme:

- +0,2 pts - Obter uma expressão para a energia total apos substituir a linearização de s_i , que é linear na soma de s_i
- +0,15 pts - Pela expressão de c_1
- +0,15 pts - Pela expressão de c_2

A.4

Por inspeção, como a energia é linear em $\sum_i s_i$ é, o sistema é efetivamente um termo constante mais um campo magnetico efetivo B_e , onde:

$$-B_e m_0 s_i = -(h + 2Js) s_i \Rightarrow B_e = \frac{h + 2Js}{m_0} \Rightarrow h_e = h + 2Js \quad (19)$$

Marking Scheme:

- +0,3 pts - Por reconhecer que o termo multiplicando $\sum_i s_i$ na energia total é analogo ao sistema possuir um campo magnetico efetivo
- +0,2 pts - Pela expressão correta de h_e

A.5

Nesta aproximação a energia é linear em s_i , e aplicando a distribuição de Boltzmann temos que:

$$s = \frac{1}{e^{\frac{h_e}{k_B T}} + e^{-\frac{h_e}{k_B T}}} \left(e^{\frac{h_e}{k_B T}} - e^{-\frac{h_e}{k_B T}} \right) = \tanh \left(\frac{h_e}{k_B T} \right) \quad (20)$$

Substituindo a expressao de h_e , temos:

$$s = \tanh \frac{h + 2Js}{k_b T} \quad (21)$$

Marking Scheme:

- +0,3 pts - Por aplicar a distribuição de Boltzmann em s_i e obter uma expressão para s em função de h_e

- +0,2 pts - Por usar $h_e = h + 2Js$, e obter uma equação que s deve obedecer

A.6

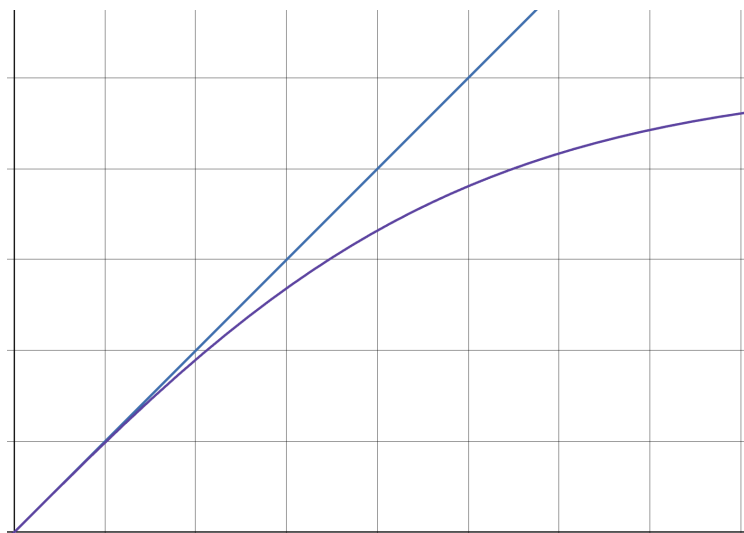
Para $h = 0$ temos:

$$s = \tanh \frac{2Js}{k_b T} \quad (22)$$

Note que lado direito da equação é sempre menor que 1, e ambos os lados da equação em $s = 0$ são 0. Para isso ter solução precisamos que T seja suficientemente pequeno tal que o lado direito da equação tenha derivada maior que 1 em $s = 0$. Logo, no ponto crítico precisamos que:

$$\frac{2J}{k_b T_C} = 1 \Rightarrow T_C = \frac{2J}{k_b} \quad (23)$$

Uma interpretação grafica disso é pelo grafico de s e $\tanh \frac{2Js}{k_b T}$ abaixo:



Onde a linha roxa é $\tanh x$, e a azul x . Essas duas curvas se encontram em apenas $x = 0$. Para qualquer $\tanh(\alpha x)$ para $\alpha < 1$ passamos a ter nenhuma solução além de $x = 0$, e para $\alpha > 1$ duas soluções, com a segunda caracterizando a magnetização espontanea.

Marking Scheme:

- +0,6 pts - Por aplicar $h = 0$, e comparar s com $\tanh \frac{2Js}{k_b T}$
- +0,2 pts - Por algum argumento que para existir solução o termo constante dentro do tanh deve ser grande suficiente (varios jeitos de fazer isso, um método é olhando a derivada como acima, ou pensando graficamente)
- +0,2 pts - Pela expressão de T_C

A.7 Para $T > T_C$, $s = 0$, já que $s = \tanh \frac{2Js}{k_b T}$ não possui solução para $T > T_C$.

Marking Scheme:

- +1,0 pts - Por reconhecer que a única solução deve ser $s = 0$

A.8

Dado a expressão para s com $h = 0$, temos:

$$s = \tanh \frac{2Js}{k_b T} \Rightarrow s = \frac{2Js}{k_b T} - \frac{1}{3} \frac{8J^3 s^3}{k_b^3 T^3} \quad (24)$$

Onde expandimos o lado direito da equação com $\tanh x = x - x^3/3$ dado que perto de T_C s é perto de 0. Uma solução é $s = 0$, e assim:

$$1 = \frac{2J}{k_b T} - \frac{8J^3 s^2}{3k_b^3 T^3} \Rightarrow s^2 = \frac{3k_b^3 T^3}{8J^3} \left(\frac{2J}{k_b T} - 1 \right) = \frac{3k_b^3}{8J^3} T^2 \left(\frac{2J}{k_b} - T \right) = \frac{3T^2}{T_C^2} \frac{T_C - T}{T_C} \quad (25)$$

$$s = \pm \frac{T}{T_C} \sqrt{3 \frac{T_C - T}{T_C}} = M_0 \cdot T(T_C - T)^{1/2} \quad (26)$$

Assim $M_0 = \pm \frac{1}{T_C} \sqrt{\frac{3}{T_C}}$ e $\beta = 1/2$

Marking Scheme:

- +0,2 pts - Por expandir a $\tanh$ para s pequeno, e obter a solução trivial $s = 0$
- +0,3 pts - Por resolver a equação quadrática de s e obter a expressão correta para M_0 incluindo os dois sinais
- Note: penalize 0.2 pts caso os dois sinais em M_0 não forem inclusos

B.1

Dada a expressão para s , temos:

$$s = \tanh \frac{h + 2Js}{k_b T} \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial h} = \left(\frac{1}{k_b T} + \frac{2J}{k_b T} \frac{\partial s}{\partial h} \right) \frac{1}{\cosh^2 \frac{h + 2Js}{k_b T}} \quad (27)$$

Usando $h \rightarrow 0$, temos:

$$\frac{\partial s}{\partial h} \left(\cosh^2 \frac{2Js}{k_b T} - \frac{2J}{k_b T} \right) = \frac{1}{k_b T} \Rightarrow \chi = \frac{\partial s}{\partial h} = \frac{1}{k_b T} \frac{1}{\cosh^2 \frac{2Js}{k_b T} - \frac{2J}{k_b T}} \quad (28)$$

Note que aqui podemos usar $\cosh^2 x = \frac{1}{1 - \tanh^2 x}$, para alternativamente obter:

$$\chi = \frac{1}{k_b T} \frac{1}{\cosh^2 \frac{2Js}{k_b T} - \frac{2J}{k_b T}} = \frac{1}{k_B T} \frac{1}{\frac{1}{1 - s^2} - \frac{2J}{k_B T}} \quad (29)$$

Marking Scheme:

- +0,4 pts - Por derivar a equação de consistência de s por h e separar os termos de $\partial s / \partial h$
- +0,6 pts - Por obter a expressão correta para $\partial s / \partial h$. Ou a equação 28 ou 29 ganha pontos integrais.

B.2

Para $T > T_C$, $s = 0$, logo:

$$\chi = \frac{1}{k_b T} \frac{1}{1 - T_C/T} = \frac{1}{k_b(T - T_C)} = \frac{1}{k_B} \frac{1}{|T - T_C|^1} \quad (30)$$

Logo $A_+ = \frac{1}{k_b}$, e $\gamma_+ = 1$

Marking Scheme:

- +0,4 pts - Por aplicar que para $T > T_C$ $s = 0$
- +0,2 pts - Por obter a expressão correta para A_+
- +0,4 pts - Por obter a expressão correta para γ_+

B.3

Para $T < T_C$, $s = \pm \frac{T}{T_C} \sqrt{3 \frac{T_C - T}{T_C}}$, e note que como $T \approx T_C$ podemos expandir em $T_C - T$:

$$\cosh \frac{2Js}{k_b T} = \cosh \frac{T_C}{T} s = \cosh \sqrt{3(T_C - T)/T_C} = 1 + \frac{3}{2} \frac{T_C - T}{T_C} \quad (31)$$

E assim, usando que $(1 + x)^2 \approx 1 + 2x$ para $x \ll 1$:

$$\cosh^2 \frac{2Js}{k_b T} = 1 + 3 \frac{T_C - T}{T_C} = 1 + 3 \frac{t}{T_C} \quad (32)$$

Onde definimos $t = T_C - T$. Assim temos:

$$\chi = \frac{1}{k_b T} \frac{1}{1 + 3t/T_C - T_C/T} = \frac{1}{k_b T} \frac{1}{T + 3Tt/T_C - T_C} = \frac{1}{k_b T_C - t + 3(T_C - t)t/T_C - T_C} \quad (33)$$

Desprezando fatores de t^2 , temos:

$$\chi = \frac{1}{k_b T_C - t + 3t - T_C} = \frac{1}{k_b} \frac{1}{2t} = \frac{1}{2k_b T_C - T} \quad (34)$$

Logo $A_- = \frac{1}{2k_b}$, e $\gamma_- = 1$. Assim, $\gamma_- = \gamma_+ = 1$, e $A_+/A_- = 2$.

Marking Scheme:

- +0,2 pts - Por aplicar a solução para s para $T < T_C$
- +0,2 pts - Por expandir $\cosh x$, e $(1 + x)^2$ para x pequeno
- +0,2 pts - Por obter a expressão correta para A_-
- +0,2 pts - Por obter a expressão correta para γ_-
- +0,2 pts - Por obter $A_+/A_- = 2$

C.1

Para $T = T_C$, expandindo a $\tanh$ dado o argumento pequeno, temos:

$$s = \tanh \frac{h + 2Js}{2J} = \frac{h}{2J} + s - \frac{1}{3} \left(\frac{h + 2Js}{2J} \right)^3 \Rightarrow \frac{h}{2J} = 3 \left(\frac{h + 2Js}{2J} \right)^3 \quad (35)$$

Pode se perceber que nesse regime $s \propto h^{1/3}$, logo o termo da cubica da direita mais relevante é apenas $3s^3$, e assim:

$$s^3 = \frac{h}{6J} \Rightarrow s = \left(\frac{1}{6J} \right)^{1/3} h^{1/3} \quad (36)$$

Assim $\delta = 3$.

Marking Scheme:

- +0,4 pts - Por expandir o termo de $\tanh$ cubicamente
- +0,4 pts - Por argumentando (ou argumentando dadas as escalas) que precisamos ter $s \propto h^{1/3}$ e $\delta = 3$
- +0,2 pts - Pela expressão correta de $s(h)$ incluindo o termo constante

C.2

Com $h = 0$, a energia total do sistema é dada por:

$$E = NJs^2 - 2Js \sum_i s_i \quad (37)$$

E a energia média é dada por:

$$\langle E \rangle = NJs^2 - 2Js \sum_i \langle s_i \rangle = NJs^2 - 2Js^2 \sum_i 1 = -JNs^2 \quad (38)$$

E por dipolo é $\epsilon = -Js^2$. Assim, a capacidade termica por dipolo é dada por:

$$\frac{d\epsilon}{dT} = -J \frac{ds^2}{dT} = -2Js \frac{ds}{dT} \quad (39)$$

Para $T > T_C$, $s = 0$, logo a capacidade termica é 0. Para $T < T_C$, vamos definir $t = T_C - T$.

$$C(T) = \frac{d\epsilon}{dT} = -3J \frac{d}{dT} \left(\frac{T^2}{T_C^2} (1 - T/T_C) \right) = -3 \frac{J}{T_C^2} \left(2T - 3T^2/T_C \right) = -\frac{3J}{T_C^2} T \left(2 - 3 \frac{T}{T_C} \right) = \frac{3k_b}{2} \frac{T}{T_C} \left(3 \frac{T}{T_C} - 2 \right) \quad (40)$$

Embora não necessario, o aluno tambem pode expandir esse resultado para $T \approx T_C$, escrevendo $t = (T_C - T)/T_C$, e obtendo:

$$C = \frac{3k_b}{2} (3(1-t)^2 - 2(1-t)) \approx \frac{3k_b}{2} - 6k_b t = \frac{3k_b}{2} - 6k_b \frac{T_C - T}{T_C} \quad (41)$$

E em T_C^- temos que $C(T_C) = \frac{3J}{2J} k_b = \frac{3}{2} k_b$.

Note que temos uma discontinuidade. Se aproximando a $T = T_C$ por cima, a capacidade termica é 0, e por baixo é $\frac{3}{2} k_b$.

Marking Scheme:

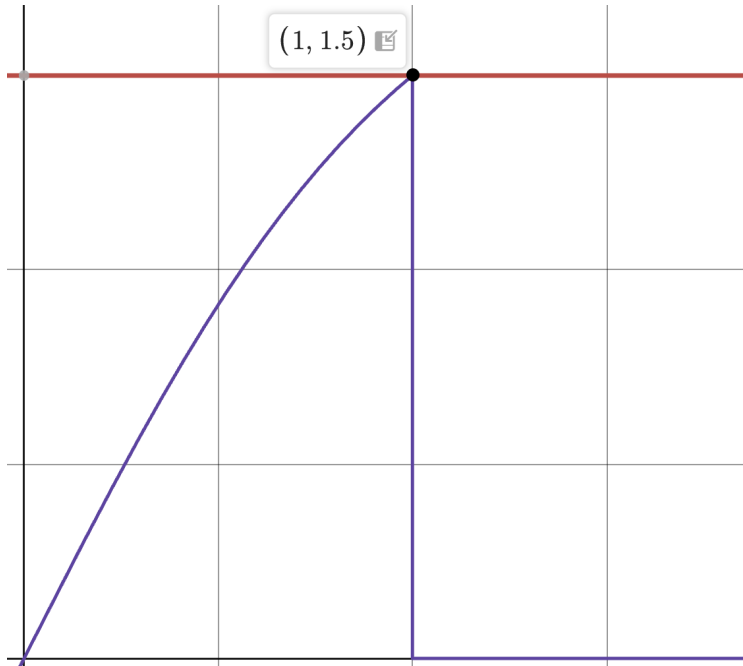
- +0,4 pts - Por aplicar a equação da energia e obter uma expressão para a energia média do sistema em função de s
- +0,2 pts - Por obtendo que para $T > T_C$ a capacidade termica é 0
- +0,2 pts - Por obter que em $T = T_C$, $C = 3/2 k_b$
- +0,2 pts - Por obter a expressão correta para $T < T_C$. Note que obter ou a equação 40 ou 41 ganha pontos integrais

C.3

Os pontos principais do grafico:

- Em T abaixo (porem infinitesimalmente abaixo de T_C), $C = 3k_b/2$
- Para $T > T_C$, $C = 0$
- Em $T = 0$ a capacidade termica também deve ser 0 (note que o resultado do item acima é diferente a isto, porem isso é devido as expansões para $T \approx T_C$)

O esboco é da seguinte forma (linha roxa no seguinte grafico):



Com eixo $x = T/T_C$, e eixo $y = C/k_b$. Note a discontinuidade em $T = T_C$, que em $T = T_C$ temos $C/k_b = 3/2$, e que para $T > T_C$ temos $C = 0$.

- +0,4 pts - Por mostrar a discontinuidade em $T = T_C$ com $C = 3/2k_b$
- +0,4 pts - Por mostrar que para $T > T_C$, $C = 0$
- +0,2 pts - Por mostrar que em $T = 0$, $C = 0$

D.1

No limite $t \rightarrow 0$, o argumento de $\mathcal{M}$ diverge da forma $\frac{1}{|t|^{\beta'\delta'}}$, logo precisamos que isso cancele com o fator de $|t|^{\beta'}$, logo precisamos que $\mathcal{M}(x) \propto x^{1/\delta'}$ em $x \rightarrow \infty$, logo $s \propto h^{1/\delta'}$ em $t \rightarrow 0$.

Marking Scheme:

- +0,6 pts - Por reconhecer que em $t \rightarrow 0$ precisamos de algo para cancelar a divergência
- +0,4 pontos - Por obter que $s \propto h^{1/\delta'}$

D.2

Para $h \rightarrow 0$, expandimos $\mathcal{M}(x)$ no limite $x \rightarrow 0$, e obtemos $\mathcal{M}(x) = c_1 x + O(x^3) = c_1 \frac{h}{|t|^{\beta'\delta'}} + O(h^3)$, já que devemos ter fatores ímpares em h apenas - note que isso é verdade pois s deve ser uma função ímpar em h . Note que também precisamos de termos lineares em h (ou seja $c_1 \neq 0$) pois caso contrário $\chi = 0$ que não é verdade.

Assim em primeira ordem $s = |t|^{\beta'} \cdot c_1 \frac{h}{|t|^{\beta'\delta'}}$, e:

$$\chi = c_1 \frac{1}{|t|^{\beta'(\delta'-1)}} \quad (42)$$

A parte relevante é a dependência com $\frac{1}{|t|^{\beta'(\delta'-1)}}$

Marking Scheme:

- +0,6 pts - Por expandir $\mathcal{M}$ linearmente em h , e argumentar que o termo linear é o mais relevante
- +0,4 pontos - Por obter que $\chi \propto \frac{1}{|t|^{\beta'(\delta'-1)}}$

D.3

Comparando com $\chi \propto \frac{1}{|t|^\gamma}$, temos $\gamma = \beta'(\delta' - 1)$.

Note que para o modelo de ising, encontramos $\beta = 1/2, \delta = 3, \gamma = 1$, que satisfaz a equação acima.

Marking Scheme:

- +1,0 pts - Por obter que $\gamma = \beta'(\delta' - 1)$

E.1

Dado:

$$P(v) = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \Rightarrow P'(v) = -\frac{RT}{(v-b)^2} + 2\frac{a}{v^3} \quad (43)$$

E:

$$P''(v) = 2\frac{RT}{(v-b)^3} - 6\frac{a}{v^4} \quad (44)$$

Assim, em T_C, v_c , temos:

$$\frac{RT_C}{(v_c-b)^2} = 2\frac{a}{v_c^3}, \quad \frac{2RT_C}{(v_c-b)^3} = \frac{6a}{v_c^4} \quad (45)$$

$$4\frac{a}{v_c^3} \frac{1}{v_c-b} = \frac{6a}{v_c^4} \Rightarrow \frac{1}{v_c-b} = \frac{3}{v_c} \Rightarrow 2v_c = 3v_c - 3b \Rightarrow v_c = 3b \quad (46)$$

Assim, temos que:

$$\frac{RT_C}{4b^2} = 2\frac{a}{27b^3} \Rightarrow T_C = \frac{8a}{27Rb} \quad (47)$$

E finalmente:

$$P_C = \frac{RT_C}{v_c-b} - \frac{a}{v_c^2} = \frac{8a}{27b} \frac{1}{2b} - \frac{a}{9b^2} = \frac{4a}{27b^2} - \frac{3a}{27b^2} = \frac{a}{27b^2} \quad (48)$$

Marking Scheme:

- +0,4 pts - Pela equação expandida da primeira derivada de $P(v)$
- +0,4 pts - Pela equação expandida da segunda derivada de $P(v)$
- +0,4 pts - Pela expressão para v_C
- +0,4 pts - Pela expressão para P_C
- +0,4 pts - Pela expressão para T_C

E.2

Dado:

$$T = T_C + tT_C, \quad P = P_C + pP_C, \quad v = v_c + \phi v_c \quad (49)$$

Um metodo é expandir a equação de estado ate segunda/terceira ordem em ϕ e simplificar. Um metodo um pouco mais simples, é considerar multiplas derivadas de P em relação a T e v . Seja $P_x = \frac{\partial P}{\partial x}$, e assim $P_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y}$. Temos:

$$P_v = -\frac{RT}{(v-b)^2} + 2\frac{a}{v^3} \text{ e no ponto critico } P_v = 0 \quad (50)$$

$$P_{vv} = \frac{2RT}{(v-b)^3} - \frac{6a}{v^4} \text{ e no ponto critico } P_{vv} = 0 \quad (51)$$

$$P_{vvv} = -\frac{6RT}{(v-b)^4} + \frac{24a}{v^5} \text{ e no ponto critico } P_{vvv} = -\frac{a}{81b^5} \quad (52)$$

Similarmente:

$$P_T = \frac{R}{v-b} \text{ e no ponto critico } P_t = \frac{R}{2b} \quad (53)$$

$$P_{Tv} = -\frac{R}{(v-b)^2} \text{ e no ponto critico } P_{Tv} = -\frac{R}{4b^2} \quad (54)$$

Dado tudo isso, em primeira ordem, temos que:

$$P_C + P_C \cdot p = \frac{RT_C}{(v_c-b)^2} - \frac{a}{v_c^2} + \left(P_{vvv}v_c^3 \frac{\phi^3}{6} + P_{TT}T_C t + P_{Tv}v_c T_C t \phi \right) \quad (55)$$

E assim:

$$P_C \cdot p = -\frac{a}{81b^5} \cdot 27b^3 \frac{\phi^3}{6} + \frac{1}{2b} \frac{8a}{27b} t - \frac{R}{4b^2} \frac{8a}{27b^2} 3bt\phi = -\frac{a}{18b^2} \phi^3 + \frac{4a}{27b^2} t - \frac{2a}{9b^2} t\phi \quad (56)$$

E finalmente:

$$p = 4t - 6t\phi - \frac{3}{2}\phi^3 \quad (57)$$

Logo $A = 4, B = 6, C = 3/2$

Marking Scheme:

- +0,4 pts - Por expandir a equação de estado perto dos pontos criticos ate terceira ordem em ϕ , ordem $t \cdot \phi$, OU fazer o metodo descrito acima para obter os termos A, B, C
- +0,2 pts - Pela valor correto de A
- +0,2 pts - Pela valor correto de B
- +0,2 pts - Pela valor correto de C

E.3

Em $t = 0$, temos $p = -\frac{3}{2}\phi^3$, logo $\delta = 3$

Marking Scheme:

- +0,6 pts - Por escrever que em $t = 0$, $p = -\frac{3}{2}\phi^3$
- +0,4 pts - Por obter $\delta = 3$

E.4

Temos que:

$$\kappa = -\frac{1}{P_C} \frac{d\phi}{dp} \quad (58)$$

Para ϕ pequeno, temos $p = 4t - 6t\phi$, logo $\frac{dp}{d\phi} = -6t$, e assim:

$$\kappa = \frac{1}{6P_C} \frac{1}{t} \quad (59)$$

Logo, $\gamma = 1$.

Marking Scheme:

- +0,2 pts - Pela expressão correta para κ em função de $\frac{d\phi}{dp}$
- +0,4 pts - Por aplicar o valor de $\frac{d\phi}{dp}$
- +0,2 pts - Pelo valor de γ correto

E.5

Nesse ponto temos $p(\phi) = p(-\phi)$, e que $\phi_g = -\phi_l$, logo seja $\phi_g = \phi$. Assim temos para ϕ :

$$-6t\phi - \frac{3}{2}\phi^3 = 6t\phi + \frac{3}{2}\phi^3 \quad (60)$$

Logo $\phi = 0$ ou:

$$12t = -3\phi^2 \Rightarrow \phi = 2\sqrt{-t} \quad (61)$$

Assim, $\phi_g - \phi_l = 4\sqrt{-t}$

Marking Scheme:

- +0,4 pts - Por aplicar que $p(\phi) = p(-\phi)$ e obter uma equação para ϕ
- +0,4 pts - Por obter que $\phi = 0$ ou $\phi = 2\sqrt{-t}$
- +0,2 pts - Por obter que $\phi_g - \phi_l = 4\sqrt{-t}$