Q1 - Equilíbrio gravitacional e ponto de Lagrange (10 pontos)

Considere um sistema gravitacional binário, onde temos duas estrelas de massas M e m com $M \gg m$ descrevendo órbitas circulares em torno de seu centro de massa comum. A distância entre as massas é mantida constante e é igual a a e seja Ω a velocidade angular da órbita como retratado na Figura 1.

Considere agora uma terceira partícula, de massa desprezível, que não altera o movimento das duas estrelas. Na linha que une as duas estrelas, existe um ponto onde essa terceira partícula pode permanecer e ficar em repouso no referencial que gira com as estrelas. Este ponto é conhecido como o *primeiro ponto de Lagrange*, denominado como L_1.

Neste problema, iremos analisar onde L_1 é localizado, e caracterizar a *estabilidade* dele. Defina r como a distância entre a estrela de massa m e L_1 com $r \ll a$.

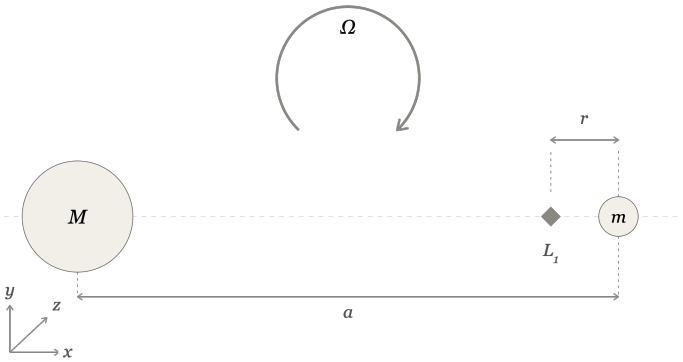


Figura 1: O sistema binário. Os eixos x e y definem o plano orbital, e rotacionam com o sistema. O ponto de equilíbrio L_1 está marcado a uma distância r da massa m.

Nas questões abaixo, pode ser útil que:

$$(1+x)^n \approx 1 + n \cdot x \text{ para } |n \cdot x| \ll 1 \tag{1}$$

A.	Encontre uma expressão para a velocidade angular da órbita Ω e para a distância r, em função de M, m, a e a constante gravitacional G.	2,0pt

Agora, vamos analisar o equilíbrio do ponto L_1 considerando várias perturbações aplicadas ao sistema. Primeiramente, considere que a partícula é levemente deslocada ao longo da linha que une as duas estrelas - o eixo x na figura acima.

B.	Determine se o ponto de equilíbrio é estável ou instável para perturbações ao longo desse eixo x.	2,0pt

Agora, considere uma pequena perturbação na direção perpendicular ao plano orbital das estrelas - o eixo z na figura acima.

C.	Mostre que para pequenas perturbações o movimento ao longo deste eixo z é harmônico, e determine o período das oscilações em função da constante gravitacional G e dos parâmetros do sistema.	3,0pt

Finalmente, vamos considerar uma pequena perturbação ao longo do último eixo possível. Considere que a partícula é deslocada a uma pequena distância Δy perpendicular à linha que une as duas estrelas e abandonada a partir do repouso.

D.	Determine a aceleração inicial da partícula em função de Δy, da constante gravitacional G e dos parâmetros do sistema, e conclua se este resultado é suficiente para afirmar se perturbações ao longo deste eixo são estáveis ou não.	3,0pt

Gabarito:

A)

Para a velocidade angular, considerando $M \gg m$, tal que a massa m descreve uma órbita circular de raio $\approx a$ em torno de M.

$$m\Omega^2 a = \frac{GMm}{a^2} \Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \tag{2}$$

Para o ponto de Lagrange, temos que a força gravitacional que age na partícula (de massa μ) é dada por:

$$F_G = G\mu\left(\frac{M}{(a-r)^2} - \frac{m}{r^2}\right) = G\mu\left(\frac{M}{a^2}\frac{1}{(1-r/a)^2} - \frac{m}{r^2}\right) \tag{3}$$

$$F_G = G\mu\left(\frac{M}{a^2}(1+\frac{2r}{a}) - \frac{m}{r^2}\right) \tag{4}$$

Onde usamos que $r \ll a$ e que $(1+x)^n \approx 1 + n \cdot x$ para $|n \cdot x| \ll 1$.

Também temos uma contribuição da força centrífuga de valor $F_C = \mu\Omega^2(a-r)$ e temos que $F_C = F_G$ para equilíbrio e assim:

$$G\mu\left(\frac{M}{a^2}(1+\frac{2r}{a}) - \frac{m}{r^2}\right) - \mu\Omega^2(a-r) = 0 \Rightarrow G\mu\left(\frac{M}{a^2}(1+\frac{2r}{a}) - \frac{m}{r^2}\right) - \frac{GM\mu}{a^3}(a-r) = 0 \tag{5}$$

E assim:

$$\frac{M}{a^2} + \frac{2M}{a^3}r - \frac{m}{r^2} - \frac{M}{a^2} + \frac{M}{a^3}r = 0 \Rightarrow \frac{3M}{a^3}r = \frac{m}{r^2} \Rightarrow r = a \cdot \left(\frac{m}{3M}\right)^{1/3} \tag{6}$$

Critério de correção:

- +0,5 pontos pela expressão de Ω equilibrando forças. Pontos integrais também são dados caso o aluno não assuma $M \gg m$ e obtenha $\Omega = \sqrt{\frac{G(M+m)}{a^3}}$
- +1,0 pontos por equilibrar força gravitacional e centrífuga para o equilíbrio em L_1
- +0,5 pontos pela expressão final de r. Todas as expressões que se reduzem a expressão acima no limite $M \gg m$ também ganham pontos integrais

B)

Um argumento qualitativo basta aqui. Considere uma perturbação em x que move a partícula mais perto de m. A força entre m e a partícula irá aumentar (puxando mais a partícula para m), a força entre M e a partícula irá diminuir (puxando menos a partícula para M) e a força centrífuga irá aumentar (empurrando mais a partícula para m). Logo a perturbação tem que ser instável! O caso para um movimento que aproxima a partícula de M é análogo.

Abaixo segue um argumento quantitativo:

Considere o eixo x. Neste eixo, a força que age na partícula (por unidade de massa) é dada por:

$$f(x) = -\frac{GM}{x^2} + \frac{Gm}{(a-x)^2} + \Omega^2 x \tag{7}$$

Note que em $x = a - r$ e com $M \gg m$ isso deve se reduzir a 0. Para uma pequena perturbação Δx, a força passa a ser $f \approx \frac{df}{dx}\Delta x$, logo podemos caracterizar estabilidade vendo se $\frac{df(x)}{dx}$ em $x = a - r$ é positivo ou não. Assim, temos:

$$\frac{df}{dx} = 2\frac{GM}{x^3} + 2\frac{Gm}{(a-x)^3} + \Omega^2 = \frac{2GM}{(a-r)^3} + 2\frac{Gm}{r^3} + \Omega^2 \tag{8}$$

Como todos estes termos são > 0, $df/dx > 0$, e o equilíbrio é instável.

Há inúmeras maneiras de resolver este item. Qualquer método que argumente de forma coesa ganhará pontos integrais (seja quantitativo ou qualitativo).

C)

Considerando uma pequena perturbação ao longo do eixo z por Δz, as únicas forças com componente no eixo z são as gravitacionais, que são restauradoras; então o equilíbrio deve ser estável. Em particular temos que a força na partícula (de massa μ) é:

$$F_z = -\frac{GM\mu}{((a-r)^2+\Delta z^2)}\frac{\Delta z}{\sqrt{((a-r)^2+\Delta z^2)}} - \frac{Gm\mu}{(r^2+\Delta z^2)}\frac{\Delta z}{\sqrt{(r^2+\Delta z^2)}} \tag{9}$$

Assumindo que $\Delta z \ll r, a$ e que $r \ll a$, temos:

$$F_z = -\frac{GM\mu}{(a-r)^3}\Delta z - \frac{Gm\mu}{r^3}\Delta z = -\frac{GM\mu}{a^3}\Delta z - \frac{Gm\mu}{r^3}\Delta z \tag{10}$$

Usando que $r^3 = a^3\frac{m}{3M}$ temos:

$$F_z = -\frac{GM\mu}{a^3}\Delta z - 3\frac{Gm\mu}{m/Ma^3}\Delta z = -4\frac{GM\mu}{a^3}\Delta z = -\mu\omega^2\Delta z \tag{11}$$

Que define um movimento harmônico de frequência angular $\omega = 2\sqrt{\frac{GM}{a^3}}$ e período $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$.

Critério de correção:

- +0,5 pontos por notar que as únicas forças relevantes são gravitacionais
- +1,0 pontos pela expressão da força dada uma perturbação em z
- +1,0 pontos por expandir para perturbações pequenas e mostrar que a força define um movimento harmônico
- +0,5 pontos pela expressão final do período T

D)

Analogamente ao item **C)**, agora considerando uma perturbação pequena $+\Delta y$, temos uma força gravitacional restauradora:

$$F_G = -4\frac{GM\mu}{a^3}\Delta y \tag{12}$$

Notavelmente, também temos uma componente da força centrífuga, já que o novo raio de rotação é $R = \sqrt{(a-r)^2+\Delta y^2}$

$$F_R = \mu\Omega^2 R \cdot \frac{\Delta y}{R} = \mu\Omega^2\Delta y = \frac{GM\mu}{a^3}\Delta y \tag{13}$$

De forma que a força total agindo na partícula é:

$$F = F_G + F_R = -4\frac{GM\mu}{a^3}\Delta y + \frac{GM\mu}{a^3}\Delta y = -3\frac{GM\mu}{a^3}\Delta y \tag{14}$$

Logo, a aceleração inicial da partícula é:

$$a_y = -3\frac{GM}{a^3}\Delta y \tag{15}$$

Que *aparenta* ser restauradora e define um movimento harmônico estável, exatamente como o item **C)**.

No entanto, perceba que dada essa perturbação teremos uma velocidade $\vec{v}$ ao longo de $-\hat{y}$ da forma $\vec{v} = -v\hat{y}$ com $v \geq 0$, e assim teremos uma **Força de Coriolis**:

$$F_C = -2\mu\ \vec{\Omega} \times \vec{v} = -2\mu\Omega v\ \hat{z} \times (-\hat{y}) = -2\mu\Omega v\hat{x} \tag{16}$$

Ou seja, começaremos a ter uma força no eixo x! Isso causará um movimento ao longo do eixo x, e lembrando o resultado do item **B)** sabemos que este movimento é instável.

Logo, ter a aceleração ao longo do eixo y restauradora não é suficiente para afirmar que o movimento é estável!

Critério de correção:

- +0,5 pontos por notar a similaridade do item **C)** e obter a expressão da força gravitacional correta
- +0,25 pontos por notar que teremos uma componente da força causada pela rotação também e pela expressão final da força
- +0,25 pontos pela expressão final da aceleração correta
- +2,0 pontos por notar que, mesmo que a força seja restauradora, o movimento gera uma força no eixo x devido ao efeito Coriolis, que pode deixar o movimento instável

Q2 - Som entre barras submersas (10 pontos)

Duas barras metálicas finas estão dispostas na água, paralelas entre si e separadas por uma distância d. As velocidades do som na água e nas barras são, respectivamente, c e v, e são diferentes, ver figura.

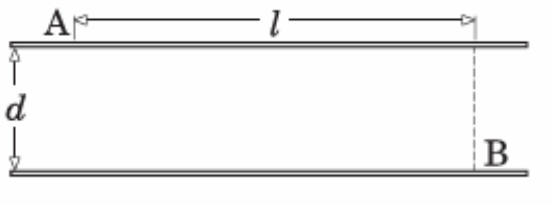


Figura 2: Barras metálicas paralelas na água.

A.	Se uma das barras é percutida no ponto A, determine o menor tempo que o som leva para viajar do ponto A até um ponto B na outra barra. Considere as duas possibilidades, $c > v$ e $c < v$.	6,0pt

Gabarito:

A)

Seja l a distância horizontal entre A e B. Considere primeiro o caso $v > c$. O som pode percorrer uma distância x ao longo da barra percutida, atravessar a água em linha reta até um ponto da outra barra, a uma distância horizontal y de A, e seguir por essa barra até B. O tempo gasto é

$$\tau(x,y) = \frac{x}{v} + \frac{1}{c}\sqrt{d^2 + (y-x)^2} + \frac{l-y}{v} = \frac{l}{v} + \frac{1}{c}\sqrt{d^2 + (y-x)^2} - \frac{y-x}{v}.$$

O tempo depende apenas de $\delta r \equiv y - x$:

$$\tau(\delta r) = \frac{l}{v} + \frac{1}{c}\sqrt{d^2 + \delta r^2} - \frac{\delta r}{v}.$$

Impondo a condição de mínimo,

$$\frac{d\tau}{d(\delta r)} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\delta r}{\sqrt{d^2 + \delta r^2}} = \frac{c}{v} \;\Rightarrow\; \delta r = \frac{cd}{\sqrt{v^2 - c^2}},$$

e, substituindo em τ,

$$\tau_{\min}^{v>c} = \frac{l}{v} + \frac{d}{cv}\sqrt{v^2 - c^2}.$$

Para $c > v$, não há vantagem em percorrer as barras, e o caminho mais rápido é a linha reta de A até B pela água:

$$\tau_{\min}^{c>v} = \frac{\sqrt{d^2 + l^2}}{c}.$$

Critério de correção (6,0 pt):

Para $v > c$:

- 2,0 pontos pela expressão do tempo $\tau(x,y)$;
- 1,0 ponto pela condição de mínimo;
- 1,0 ponto pelo cálculo de δr;
- 1,0 ponto pela expressão do tempo mínimo.

Para $c > v$:

- 1,0 ponto pela expressão do tempo mínimo.

Imagine agora a barra superior (barra 1), fixa, e a barra inferior (barra 2) se afastando da barra 1, com velocidade u, em relação a ela, na direção perpendicular às barras. Simultaneamente, a percussão na barra 1 gera ondas de frequência f_0, medida no referencial da própria barra. Considere também uma correnteza de velocidade w, no mesmo sentido do movimento da barra 2. A barra 2 possui um **hidrofone**, situado exatamente frente ao ponto A (onde a barra 1 é percutida), que capta apenas o som que vai diretamente da barra 1, pela água, até a barra 2.

B.	Determine a frequência da onda sonora captada pelo hidrofone que se encontra na barra 2.	4,0pt

Gabarito:

B)

Trabalhamos no referencial da água e tomamos como positivo o sentido do movimento da barra 2. Nesse referencial, a barra 1 se move com velocidade $-w$ e a barra 2 com velocidade $u - w$.

Na primeira etapa, a barra 1 é uma fonte que se afasta do hidrofone, e a água, em repouso, é o receptor. A frequência da onda na água é

$$f_{\text{água}} = f_0 \frac{c}{c+w}.$$

Na segunda etapa, a água faz o papel de fonte em repouso e o hidrofone é um receptor que se afasta dela com velocidade $v_{\text{rec}} = u - w$. Assim,

$$f_{\text{final}} = f_{\text{água}} \frac{c - v_{\text{rec}}}{c} = f_{\text{água}} \frac{c - u + w}{c}.$$

Substituindo $f_{\text{água}}$,

$$f_{\text{final}} = f_0 \frac{c-u+w}{c+w} = f_0 \left(1 - \frac{u}{c+w}\right).$$

Critério de correção (4,0 pt):

- 1,0 ponto pela expressão de $f_{\text{água}}$;
- 1,0 ponto pela expressão de f_{final} em função de $f_{\text{água}}$ e v_{rec};
- 1,0 ponto por $v_{\text{rec}} = u - w$;
- 0,5 ponto pela expressão de f_{final} em função de $f_{\text{água}}$, u, c e w;
- 0,5 ponto pela expressão final.

Q3 - Termodinâmica de um sólido elástico (10 pontos)

Em um modelo simples de um sólido elástico temos, para uma variação infinitesimal do volume

$$dV = -V\kappa_T dP + V\alpha dT$$

onde κ_T é a compressibilidade isotérmica e α é o coeficiente de expansão térmica. Assuma que a mudança fracionária de volume seja pequena o suficiente para que a função $V(P,T)$ que entra na expressão para dV possa ser considerada constante em $V = V_1 = V(P_1,T_1)$ durante o processo. A figura esquemática a seguir mostra três caminhos diferentes, a, b e c pelos quais o sólido pode passar, entre os estados termodinâmicos (T_1, P_1) e (T_2, P_2). O caminho c é um segmento de reta no diagrama P–T.

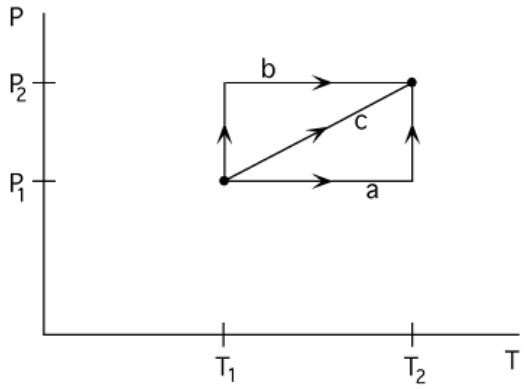


Figura 3: Esquema das transformações termodinâmicas do sólido.

A.	Encontre o trabalho realizado sobre o sólido enquanto ele é levado entre os estados (T_1,P_1) e (T_2,P_2) por cada um dos três caminhos indicados no desenho. Compare os trabalhos e ordene-os de menor a maior.	4,5pt

Gabarito:

A)

Como o volume varia pouco, substituímos V por V_1 nos coeficientes de dV. O trabalho realizado sobre o sólido é então

$$dW = -P\,dV = \kappa_T V_1 P\,dP - \alpha V_1 P\,dT.$$

No caminho a, o sólido é aquecido a pressão P_1 e depois comprimido isotermicamente:

$$W^a = -\alpha P_1 V_1 \int_{T_1}^{T_2} dT + \kappa_T V_1 \int_{P_1}^{P_2} P\,dP = -\alpha P_1 V_1 (T_2 - T_1) + \frac{1}{2}\kappa_T V_1 (P_2^2 - P_1^2).$$

No caminho b, a compressão isotérmica vem primeiro e o aquecimento ocorre a pressão P_2:

$$W^b = \frac{1}{2}\kappa_T V_1 (P_2^2 - P_1^2) - \alpha P_2 V_1 (T_2 - T_1).$$

No caminho c, T varia linearmente com P, de modo que $dT = \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} dP$ e

$$dW = \left(\kappa_T - \alpha \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1}\right) V_1 P\,dP.$$

Integrando,

$$W^c = \frac{1}{2}\kappa_T V_1 (P_2^2 - P_1^2) - \frac{1}{2}\alpha V_1 (P_1 + P_2)(T_2 - T_1).$$

Os três trabalhos diferem apenas no termo térmico, em que a pressão vale P_1, P_2 ou a média $(P_1+P_2)/2$. Como $P_2 > P_1$,

$$W^b < W^c < W^a.$$

Critério de correção (4,5 pt):

- 1,0 ponto pela expressão de W^a;
- 1,0 ponto pela expressão de W^b;
- 0,5 ponto pela relação linear $dT = \frac{T_2-T_1}{P_2-P_1}dP$;
- 1,0 ponto pela expressão de W^c;
- 1,0 ponto pela comparação.

Em processos reversíveis, a entropia do sólido satisfaz

$$dS = \frac{C_P}{T}dT - V\alpha dP$$

com $C_P \approx C_0 = const.$ e $V \approx V_1$ na expressão.

B. Calcule ΔS e mostre que é função de estado. Calcule também o calor reversível trocado em cada um dos três caminhos a,b e c, ordene os calores de menor a maior. Comente o resultado, na comparação com o resultado do item A, a partir da primeira lei da termodinâmica. 5,5pt

Gabarito:

B)

Com $C_P \approx C_0$ e $V \approx V_1$,

$$dS = \frac{C_0}{T}dT - \alpha V_1\, dP \;\Rightarrow\; \Delta S = C_0 \ln\frac{T_2}{T_1} - \alpha V_1(P_2-P_1).$$

O resultado depende apenas dos estados inicial e final, logo S é função de estado.

O calor reversível é

$$dQ = T\, dS = C_0\, dT - \alpha V_1 T\, dP.$$

No caminho a, o trecho isobárico fornece $C_0(T_2-T_1)$ e o trecho isotérmico, à temperatura T_2, fornece $-\alpha V_1 T_2(P_2-P_1)$:

$$Q_a = C_0(T_2-T_1) - \alpha V_1 T_2(P_2-P_1).$$

No caminho b, o trecho isotérmico ocorre à temperatura T_1:

$$Q_b = C_0(T_2-T_1) - \alpha V_1 T_1(P_2-P_1).$$

No caminho c, retilíneo, $dP = m\, dT$, com $m = \frac{P_2-P_1}{T_2-T_1}$. Então $T\, dP = mT\, dT$ e

$$Q_c = C_0(T_2-T_1) - \alpha V_1 m\frac{T_2^2-T_1^2}{2} = C_0(T_2-T_1) - \alpha V_1\frac{T_1+T_2}{2}(P_2-P_1).$$

Como $T_2 > T_1$, o termo subtraído é maior em a e menor em b, e portanto

$$Q_a < Q_c < Q_b.$$

A ordem dos calores é a inversa da ordem dos trabalhos do item A, como exige a primeira lei: a variação da energia interna é a mesma nos três caminhos,

$$\Delta U = Q_a + W^a = Q_b + W^b = Q_c + W^c.$$

Critério de correção (5,5 pt):

- 1,0 ponto por ΔS e por mostrar que é função de estado;
- 0,5 ponto pela expressão do calor reversível;
- 1,0 ponto pela expressão do calor no caminho a;
- 1,0 ponto pela expressão do calor no caminho b;
- 1,0 ponto pela expressão do calor no caminho c;
- 1,0 ponto pela comparação.

Q4 - Imagem de um projétil por uma lente delgada (10 pontos)

Considere uma lente delgada convergente, de distância focal f, fixa, com o eixo óptico disposto na horizontal. No instante $t = 0$, um pequeno objeto pontual luminoso é lançado obliquamente a partir de um ponto sobre o próprio eixo óptico, a uma distância $p_0 > f$ da lente, com velocidade inicial de módulo v_0 fazendo um ângulo θ acima do eixo. O objeto se afasta da lente ao longo do eixo à medida que sobe, sob a ação da gravidade, com aceleração local g constante. Despreze a resistência do ar.

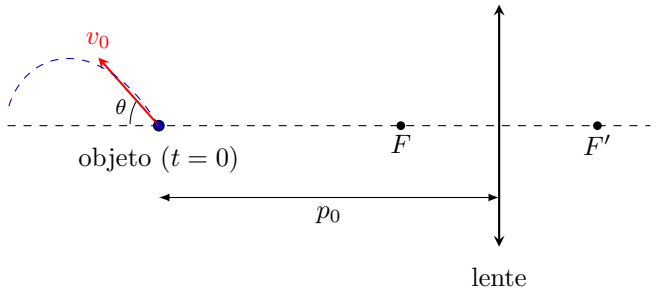


Figura 4: Lente delgada convergente e objeto lançado obliquamente a partir do eixo óptico, afastando-se da lente.

Nesta questão, considere apenas o intervalo de tempo entre o lançamento e o instante em que o objeto retorna ao eixo óptico, isto é, $0 \leq t \leq 2v_0 \sin\theta/g$. Ao longo desse intervalo, a distância entre o objeto e a lente permanece maior que f. Suponha ainda que o objeto permaneça suficientemente próximo do eixo óptico para que a aproximação de raios de luz paraxiais seja válida durante todo esse intervalo.

Adote o eixo horizontal idêntico ao eixo óptico da lente, com sentido positivo aquele em que o objeto se afasta da lente, e o eixo vertical com sentido positivo para cima. Denote por $Y_o(t)$ e $Y_i(t)$ as alturas (coordenadas transversais) do objeto e da imagem em relação ao eixo óptico, em cada instante t.

Faça o que se pede nos itens a seguir.

A.	Determine a posição inicial da imagem, isto é, a distância p'_0 entre a imagem e a lente no instante $t = 0$.	1,0pt
B.	Determine as componentes horizontal e vertical do vetor velocidade da imagem $\vec{v}_i$ no instante $t = 0$.	3,0pt
C.	Determine a distância máxima que a imagem atinge em relação ao eixo óptico, no intervalo considerado.	3,0pt
D.	Determine o raio de curvatura da trajetória do **objeto** nos seguintes instantes: (i) t=0 e (ii) no instante em que a altura dele é máxima.	3,0pt

Gabarito:

Sejam $v_x = v_0\cos\theta$ e $v_y = v_0\sin\theta$ as componentes da velocidade inicial do objeto ao longo do eixo e perpendicular a ele. A distância do objeto à lente e sua altura são

$$p(t) = p_0 + v_x t, \qquad Y_o(t) = v_y t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Pela equação de Gauss, a posição da imagem e o aumento transversal são

$$p'(t) = \frac{f\,p(t)}{p(t) - f}, \qquad A(t) = -\frac{p'(t)}{p(t)} = -\frac{f}{p(t) - f},$$

e a altura da imagem é $Y_i(t) = A(t)\,Y_o(t)$. Para simplificar a escrita, definimos $s(t) \equiv p(t) - f = s_0 + v_x t$, com $s_0 = p_0 - f > 0$, de modo que $A(t) = -f/s(t)$.

A)

Aplicando a equação de Gauss em $t = 0$,

$$p_0' = \frac{f\,p_0}{p_0 - f}.$$

Critério de correção (1,0 pt):

- 1,0 pt por aplicar corretamente a equação de Gauss para obter p_0'.

B)

Escrevendo $p'(t) = f + f^2/s(t)$ e derivando,

$$\frac{dp'}{dt} = -\frac{f^2 v_x}{s^2} = -A^2 v_x.$$

Esse é o resultado conhecido de que o aumento longitudinal é o quadrado do aumento transversal. Como a imagem está do outro lado da lente, a diminuição de p' significa que ela se aproxima da lente, movendo-se no mesmo sentido do objeto, isto é, no sentido horizontal positivo.

Para a componente transversal,

$$\frac{dY_i}{dt} = \frac{dA}{dt}\,Y_o + A\,\frac{dY_o}{dt}.$$

Como o objeto parte do eixo óptico, $Y_o(0) = 0$ e o primeiro termo se anula em $t = 0$. Com $A_0 = A(0) = -f/(p_0 - f)$, as componentes da velocidade inicial da imagem são

$$v_{i,x}(0) = A_0^2 v_x = \frac{f^2}{(p_0 - f)^2}\,v_0 \cos\theta, \qquad v_{i,y}(0) = A_0 v_y = -\frac{f}{p_0 - f}\,v_0 \sin\theta.$$

A componente vertical é negativa: a imagem, invertida, começa a se mover para baixo.

Critério de correção (3,0 pt):

- 1,0 pt por obter $A_0 = -f/(p_0 - f)$, a partir de p_0' ou diretamente da equação de Gauss;
- 1,0 pt pela componente horizontal $A_0^2 v_x$, com o sentido correto (aceitar módulo e sentido descritos em palavras);
- 1,0 pt pela componente transversal $A_0 v_y$, usando corretamente $Y_o(0) = 0$.

C)

A altura da imagem é

$$Y_i(t) = -f\,\frac{Y_o(t)}{s(t)} = -f\,\frac{v_y t - \frac{1}{2}gt^2}{s_0 + v_x t}.$$

Impondo $dY_i/dt = 0$, o numerador da derivada deve se anular:

$$(v_y - gt)(s_0 + v_x t) - v_x\left(v_y t - \tfrac{1}{2}gt^2\right) = 0 \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{2}g v_x\,t^2 + g s_0\,t - v_y s_0 = 0,$$

cuja raiz positiva, que pertence ao intervalo $0 < t^* < 2v_y/g$, é

$$t^* = \frac{s_0}{v_x}\left(\sqrt{1 + \frac{2v_x v_y}{g s_0}} - 1\right).$$

Para obter o valor máximo sem substituir t^* diretamente, note que Y_o/s é a inclinação da reta que liga o foco F ao objeto. No extremo, essa reta é tangente à trajetória, e portanto sua inclinação é igual à da velocidade do objeto, $(v_y - gt^*)/v_x$. Assim,

$$|Y_{i,\,\max}| = f\,\frac{v_y - gt^*}{v_x} = \frac{f}{v_x^2}\left[g s_0 + v_x v_y - \sqrt{g s_0\,(g s_0 + 2 v_x v_y)}\right].$$

Critério de correção (3,0 pt):

- 1,0 pt por derivar $Y_i(t)$ corretamente e montar a condição $dY_i/dt = 0$;
- 1,0 pt por chegar à equação quadrática em t e obter t^*;
- 1,0 pt pela expressão final correta de $|Y_{i,\,\max}|$, por qualquer método.

D)

A aceleração do objeto é sempre $\vec{g}$. Apenas a componente de $\vec{g}$ perpendicular à velocidade curva a trajetória, de modo que

$$\frac{v^2}{R} = g\cos\varphi \;\Rightarrow\; R = \frac{v^2}{g\cos\varphi},$$

onde φ é o ângulo entre a velocidade e a horizontal.

Em $t = 0$, $v = v_0$ e $\varphi = \theta$:

$$R(0) = \frac{v_0^2}{g\cos\theta}.$$

No ponto mais alto, em $t_1 = v_y/g$, a velocidade é horizontal, com $v = v_x$ e $\varphi = 0$:

$$R(t_1) = \frac{v_x^2}{g} = \frac{v_0^2\cos^2\theta}{g}.$$

Critério de correção (3,0 pt):

- 0,5 pt por reconhecer que apenas a componente de $\vec{g}$ perpendicular à velocidade atua como aceleração centrípeta ($v^2/R = g\cos\varphi$);
- 1,0 pt pelo resultado em $t = 0$: $R(0) = v_0^2/(g\cos\theta)$;
- 0,5 pt por identificar que, em $t_1 = v_y/g$, a velocidade do objeto é horizontal;
- 1,0 pt pelo resultado no ponto mais alto: $R(t_1) = v_x^2/g$.

Q5 - Pêndulo girante imerso em líquido (10 pontos)

Um pêndulo é constituído por uma haste rígida leve (de massa desprezível) de comprimento ℓ, articulada em um pivô fixo, com uma pequena esfera de massa m e densidade ρ presa à outra extremidade. Todo o conjunto — pivô, haste e esfera — está imerso em um líquido de densidade $\rho_L < \rho$, contido em um recipiente. O recipiente, o líquido e o pêndulo giram todos com uma velocidade angular constante ω, em torno do eixo vertical que passa pelo pivô, conforme ilustra a figura a seguir.

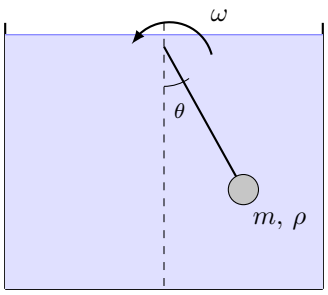


Figura 5: Pêndulo imerso em líquido, girando rigidamente com o recipiente em torno do eixo vertical que passa pelo pivô.

A articulação no pivô é uma dobradiça que permite oscilação apenas em um plano vertical girante que sempre contém o eixo de rotação: assim, o pêndulo gira rigidamente junto com o recipiente (sem deslizamento na direção azimutal), e todo o movimento relevante fica descrito por um único ângulo $\theta(t)$ entre a haste e a vertical.

A esfera permanece sempre totalmente submersa no líquido e a aceleração da gravidade tem módulo g. Despreze a viscosidade, o arrasto e a massa adicional do líquido (isto é, a inércia do líquido arrastado pela esfera em movimento). Faça o que se pede nos itens a seguir.

A.	Determine a velocidade angular mínima $\omega_{\min}$ acima da qual passa a existir uma posição de equilíbrio do pêndulo fora da vertical ($\theta_0 \neq 0$).	3,0pt

Gabarito:

A)

No referencial que gira com o sistema, o líquido está em repouso, e sua pressão obedece à equação da hidrostática com a gravidade efetiva

$$\nabla p = \rho_L \, \vec{g}_{\text{ef}}, \qquad \vec{g}_{\text{ef}} = \vec{g} + \omega^2 \vec{r}_\perp,$$

onde $\vec{r}_\perp$ é a posição horizontal medida a partir do eixo. Pelo mesmo argumento de Arquimedes, o empuxo sobre um corpo de volume V é

$$\vec{F}_{\text{emp}} = -\rho_L V \, \vec{g}_{\text{ef}} = \rho_L V g \, \hat{z} - \rho_L V \omega^2 \vec{r}_\perp.$$

Além do empuxo vertical usual, aparece uma componente horizontal dirigida para o eixo.

Somando o peso, a força centrífuga sobre a esfera e o empuxo, com $V = m/\rho$, a força total, exceto a exercida pela haste, é

$$\vec{F} = (m - \rho_L V)\left(-g\hat{z} + \omega^2 \vec{r}_\perp\right) = mk\left(-g\hat{z} + \omega^2 \vec{r}_\perp\right), \qquad k \equiv 1 - \frac{\rho_L}{\rho}.$$

O empuxo reduz o peso e a força centrífuga pelo mesmo fator k.

No equilíbrio, $\vec{F}$ deve ser paralela à haste para ser equilibrada pela força que ela exerce sobre a esfera. Com $r_\perp = \ell \sin\theta_0$,

$$\tan\theta_0 = \frac{\omega^2 \ell \sin\theta_0}{g} \;\Rightarrow\; \cos\theta_0 = \frac{g}{\omega^2 \ell} \quad (\theta_0 \neq 0).$$

O fator k se cancela, e a condição é a mesma de um pêndulo cônico sem líquido. Há solução com $\theta_0 \neq 0$ somente se $\omega^2 \ell > g$, ou seja,

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{\ell}},$$

independentemente de m, ρ e ρ_L.

Critério de correção (3,0 pt):

- 1,0 pt por obter o empuxo no referencial girante como $-\rho_L V \vec{g}_{\text{ef}}$, reconhecendo o termo centrífugo adicional;
- 1,0 pt por combinar peso, empuxo e força centrífuga, chegando a $\vec{F} = mk(-g\hat{z} + \omega^2 \vec{r}_\perp)$;
- 0,5 pt por impor que a força seja paralela à haste e obter $\cos\theta_0 = g/(\omega^2\ell)$;
- 0,5 pt por concluir $\omega_{\min} = \sqrt{g/\ell}$ e notar que o resultado independe de ρ, ρ_L e m.

B. Para $\omega > \omega_{\min}$, determine a posição de equilíbrio θ_0. 2,0pt

Gabarito:

B)

Da condição de equilíbrio obtida no item A,

$$\theta_0 = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 \ell}\right),$$

bem definido para $\omega > \omega_{\min}$, com $0 < \theta_0 < \pi/2$, pois $0 < g/(\omega^2\ell) < 1$: a esfera fica abaixo do pivô.

Critério de correção (2,0 pt):

- 1,5 pt por usar a condição de equilíbrio do item A para escrever $\theta_0 = \arccos\big(g/(\omega^2\ell)\big)$;
- 0,5 pt por observar que $0 < \theta_0 < \pi/2$, ou seja, que o equilíbrio está abaixo do pivô.

C. Calcule o período das pequenas oscilações do pêndulo em torno de θ_0. 5,0pt

Gabarito:

C)

No referencial girante, a esfera se move apenas ao longo do arco de raio ℓ. A energia cinética envolve a massa real da esfera, pois o empuxo não altera sua inércia:

$$E_c = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2.$$

O peso e a força centrífuga, já reduzidos pelo empuxo, são conservativos, e o potencial efetivo é o do pêndulo cônico multiplicado por k:

$$U(\theta) = k\left[-mg\ell\cos\theta - \frac{1}{2} m\omega^2 \ell^2 \sin^2\theta\right].$$

O mínimo desse potencial reproduz $\cos\theta_0 = g/(\omega^2\ell)$.

Para pequenos desvios em torno de θ_0, $\omega_{\text{osc}}^2 = U''(\theta_0)/(m\ell^2)$, com

$$U''(\theta) = k\left[mg\ell\cos\theta - m\omega^2\ell^2\cos 2\theta\right].$$

Usando $\cos\theta_0 = g/(\omega^2\ell)$ e $\cos 2\theta_0 = 2\cos^2\theta_0 - 1$,

$$U''(\theta_0) = km\omega^2\ell^2\sin^2\theta_0 \;\Rightarrow\; \omega_{\text{osc}} = \omega\sin\theta_0\sqrt{k}.$$

Ao contrário de θ_0, a frequência de oscilação depende do líquido: o empuxo reduz a força restauradora sem reduzir a inércia da esfera.

Com $\sin\theta_0 = \sqrt{1 - g^2/(\omega^4\ell^2)}$, o período é

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{\text{osc}}} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\left(1 - \dfrac{\rho_L}{\rho}\right)\left(1 - \dfrac{g^2}{\omega^4\ell^2}\right)}}.$$

Critério de correção (5,0 pt):

- 1,0 pt por escrever a energia cinética $\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$ com a massa real, não reduzida pelo empuxo;
- 1,5 pt por escrever o potencial efetivo $U(\theta) = k\left[-mg\ell\cos\theta - \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2\sin^2\theta\right]$;
- 1,0 pt por calcular $U''(\theta_0) = km\omega^2\ell^2\sin^2\theta_0$;
- 1,0 pt por obter $\omega_{\text{osc}} = \omega\sin\theta_0\sqrt{k}$ e notar que o empuxo altera o período, mas não o ângulo de equilíbrio;
- 0,5 pt pela expressão final correta do período T.