



Torneio Brasileiro de Física
2 a 8 de Maio de 2021
Prova Experimental



INSTRUÇÕES

1. Este é o caderno de questões da Prova Experimental do TBF/2021.
2. A duração da prova é de **quatro horas**.
3. Ao final da prova **você deve parar de escrever imediatamente**. O fiscal da sala vai conceder um tempo adicional de 30 minutos **exclusivamente** para a fotografia e envio das questões.
4. A duração da prova é de **quatro horas**.
5. As resoluções devem ser escritas de próprio punho em folhas inicialmente em branco e sem qualquer tipo de identificação. **Não escreva o seu nome, nem o de sua escola, nas folhas de respostas.**
6. Ao final da prova **você deve parar de escrever imediatamente**. O fiscal da sala vai conceder um tempo adicional de 30 minutos **exclusivamente** para a fotografia e envio das questões.
7. Cada questão deve ser respondida em um documento eletrônico separado, de tamanho menor que 10 Mbytes e no formato PDF (preferencialmente), ou JPG ou PNG.
8. Cada questão deve ser submetida no correspondente formulário eletrônico disponibilizado em sua área restrita do site <https://app.graxaim.org/tbf/2021>.

Introdução

Os fractais são sistemas que apresentam invariância por escala. São estudados desde o início do século passado, sendo Felix Hausdorff um dos formuladores das bases matemáticas. Na década de 1980, Benoit B. Mandelbrot estudou a geometria fractal, associada a relações de recorrência e sua apresentação gráfica. Hoje são famosas as belas e complexas figuras obtidas por meio de regras matemáticas simples.

A Natureza é rica em fractais, tanto geométricos como nas distribuições estatísticas, mas mesmo na Sociologia e no Urbanismo estas estruturas são importantes. O sistema circulatório de mamíferos, o fluxo de caminhos nas estradas de um país, o número de contatos que uma pessoa tem por dia, todas estas grandezas seguem distribuições de probabilidade que são fractais.

Dois aspectos são fundamentais para se ter uma estrutura fractal: a simetria de escala e a estrutura complexa. A simetria de escala leva a distribuições que seguem alguma lei de potência, isto é:

$$P(x) = p_o \left(\frac{x}{x_o} \right)^\alpha, \quad (1)$$

onde p_o , x_o e α são constantes. Aqui, p_o é uma constante de normalização que garante que

$$\int_0^\infty P(x) dx = 1. \quad (2)$$

Hausdorff mostrou que o parâmetro α está relacionado à dimensão topológica, D , do sistema (isto é, se ele é uni-, bi- ou tridimensional, por exemplo), e a uma distribuição anômala, d , que pode ser fracionária. Esta última depende de características da estrutura do sistema. A relação entre as dimensões é $\alpha = D + d$.

A grandeza x_o , que tem a mesma unidade de x , tem um papel importante na teoria fractal, e é o parâmetro de escala do sistema. É essa grandeza que garante que o sistema é livre de escala, pois se mudarmos simultaneamente x e x_o , de forma que $x \rightarrow x' = ax$ e $x_o \rightarrow x'_o = ax_o$, a probabilidade $P(x) = P(x')$. Assim, vemos que uma mudança de escala do sistema não altera a probabilidade. É isto que significa ser invariante por transformação de escala. Na natureza, porém, sempre temos uma quebra dessa simetria, que de alguma forma define uma dimensão preferencial. Quando x_o é fixado nesse valor, $P(x)$ se torna uma lei de potência.

Nesta experiência vamos produzir e estudar um sistema fractal simples, e obter a sua dimensão anômala.

Teoria

O problema de configurações de dobraduras tem aplicações em diversas áreas, como na forma e função de proteínas, membranas de polímeros, Ciência dos Materiais e Engenharia, nas formações geológicas, entre outras.

No caso de superfícies, observa-se empiricamente que a relação entre a massa da superfície dobrada e o diâmetro da bola obtida, se realizada sob a mesma pressão, varia com

$$M = m_o \left(\frac{L}{l_o} \right)^D, \quad (3)$$

onde m_o é uma constante, l_o é a espessura da folha, e L é o diâmetro da bola. O expoente D é a dimensão fractal, ou dimensão de Hausdorff.

Material

Para desenvolver este experimento você precisará de uma folha de papel A4 de impressora, régua, tesoura e um paquímetro. Para a análise, será necessário usar uma folha de papel milimetrado, outra de papel mono-log e outra de papel di-log. Considere o seguinte dado: a gramatura do papel de impressora comum é de 75 g , e suas dimensões (papel A4), é de $210 \text{ mm} \times 297 \text{ mm}$.

Experimento

Parte 1

Com um lápis, divida a folha de papel em formas retangulares ou quadradas de áreas bem diferentes.

Calcule a área de cada retângulo em mm^2 e escreva o valor dentro da área. Com uma tesoura ou uma régua, recorte o papel de acordo com as linhas traçadas. Avalie a incerteza das medidas.

Separadamente, pegue cada pedaço de papel, amassando-o de forma a obter uma forma aproximadamente esférica, isto é, faça uma bola de papel a partir de cada pedaço recortado. Tome o cuidado de aplicar a mesma força para todos os pedaços de papel, caso contrário o experimento ficará comprometido.

Questão 1 (valor: 2 pontos)

Fotografe todas as bolas de papel usadas no experimento, organizando-as por tamanho.

Questão 2 (valor: 5 pontos)

Meça o diâmetro de cada uma das bolas de papel. Observe que a forma não é exatamente esférica, então tome os cuidados experimentais necessários para diminuir erros sistemáticos na sua medida. Para cada uma das bolas de papel, anote os valores de cada medida numa tabela como amostrada abaixo. Obtenha o valor do diâmetro de cada bola e avalie a incerteza. Use tantas medidas quanto achar necessário.

Calcule a densidade superficial de massa da folha, ρ , e indique na tabela. Preencha a tabela com todos os dados necessários.

Medida	grandeza	área ()	massa ()	diâmetro médio ()			
1							
2							
3							
4							
5							
6							

Tabela 1: Tabela de medidas do experimento.

Parte 2

Questão 3

(valor: 7 pontos)

Uma vez de posse de todas as medidas que achar necessário, faça um gráfico no papel milimetrado do diâmetro de cada bola em função da massa. Lembre-se de indicar graficamente as incertezas da medida.

Questão 4

(valor: 10 pontos)

Com base no gráfico obtido no papel milimetrado, avalie como utilizar UMA das folhas de gráficos restantes para obter os parâmetros m_o e D da teoria que descreve o fenômeno de dobras de superfícies. Faça o gráfico necessário e obtenha os valores das duas grandezas. Avalie GRAFICAMENTE as incertezas da duas grandezas. Deixe indicado todo o procedimento de análise das incertezas no mesmo gráfico.

Questão 5

(valor: 10 pontos)

Coloque numa tabela como aquela abaixo os valores obtidos. Observe que a curva obtida pode ser escrita na forma

$$M = aL^\alpha, \quad (4)$$

onde a é uma constante a ser determinada

ρ	a ()	incerteza a ()	α ()	incerteza α ()

Tabela 2: Resultados obtidos

Análise

Questão 6

(valor: 4 pontos)

De posse dos resultados obtidos na seção Experimento - Parte 2, determine a dimensão de Hausdorff do papel amassado.

Questão 7

(valor: 2 pontos)

Com base nesta análise realizada, é possível determinar o valor da constante m_o ? Descreva detalhadamente o método para obter este valor e calcule-o, avaliando a incerteza.