

Q1 - Mecânica do corpo rígido (20 pontos) ¹

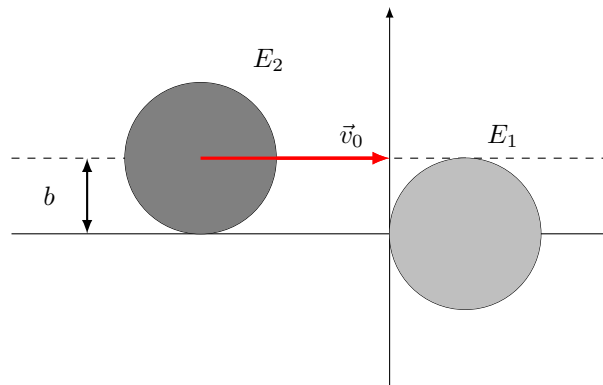
Nessa questão exploraremos aspectos interessantes sobre colisões de bolas de bilhar homogêneas idênticas de massa m e de raio r . Nesse problemas consideraremos diferentes situações físicas e consideraremos as bolas como corpos rígidos e extensos.

Considere todas as colisões com uma duração τ infinitesimal. Consideraremos sempre o tipo de colisão típico de uma mesa de sinuca, no qual uma esfera E_1 encontra-se inicialmente em repouso e é atingida por uma esfera em movimento E_2 . O movimento de E_2 antes da colisão é caracterizado por uma velocidade inicial \vec{v}_0 e uma velocidade angular $\vec{\omega}_0$.

Exploraremos diferentes tipos de colisões possíveis. Nos itens a seguir considere eventuais dissipações de energia associadas aos parâmetros físicos fornecidos.

Parte A - Efeito do parâmetro de impacto (7 pontos)

Nesta primeira parte, desprezaremos qualquer atrito entre as bolas e entre estas e a mesa sobre a qual elas se movimentam. Investigaremos o movimento das esferas subsequente à colisão em função do parâmetro de choque b , definido como a distância entre o centro de E_2 e o prolongamento da trajetória de E_1 anterior à colisão. Veja a figura a seguir.



Para colisões como essa, o coeficiente de restituição e da colisão é definido como a razão entre as componentes normais das velocidades de aproximação e afastamento com respeito à superfície de contato dos corpos durante a colisão, isto é,

$$e = \frac{v_{\perp, \text{afast.}}}{v_{\perp, \text{aprox.}}} \quad (1)$$

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.1 | Considerando uma colisão perfeitamente elástica entre as bolas de bilhar ($e = 1$), calcule os vetores velocidade \vec{v}_1 e \vec{v}_2 das bolas E_1 e E_2 , respectivamente, após a colisão em termos de b e do raio r . | 2,5pt |
| A.2 | Refaça o item anterior considerando o coeficiente de restituição $e = 0$. | 2,5pt |
| A.3 | Demonstre a conservação (ou dissipação) da energia mecânica para cada uma das situações anteriores. Quando houver dissipação, calcule a energia mecânica dissipada. | 2,0pt |

¹Autoria de Ivan Guilhon

Gabarito A.1:

A.1) Seja $\theta = \arcsen(b/2r)$ o ângulo entre o seguimento de reta que une os centros das esferas e a direção \hat{x} no instante da colisão.

É conveniente calcular as velocidades desejadas com respeito ao centro de massa do sistema, \vec{v}'_1 e \vec{v}'_2 , e depois realizar uma mudança de referencial.

A colisão perfeitamente elástica sem atrito apenas inverte o sentido da componente perpendicular à superfície de contato, enquanto a componente paralela é inalterada. Segue, portanto que

$$\vec{v}'_1 = \frac{v_0}{2} \cos\theta (\cos\theta \hat{x} - \text{sen}\theta \hat{y}) + \frac{v_0}{2} \text{sen}\theta (-\text{sen}\theta \hat{x} - \cos\theta \hat{y}). \quad (2)$$

A velocidade do centro de massa do sistema é dada por $\vec{v}_{CM} = \frac{v_0}{2} \hat{x}$. Portanto,

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_1 = v_0 \cos^2\theta \hat{x} - v_0 \cos\theta \text{sen}\theta \hat{y}. \quad (3)$$

Quanto à segunda esfera, temos que $\vec{v}'_2 = -\vec{v}'_1$. O que implica em

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_2 = v_0 \text{sen}^2\theta \hat{x} + v_0 \cos\theta \text{sen}\theta \hat{y}. \quad (4)$$

Para deixar a resposta em termos de b e r , basta fazer

$$\text{sen}\theta = \frac{b}{2r} \quad e \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{4r^2 - b^2}}{2r},$$

que resulta nas expressões

$$\vec{v}_1 = v_0 \frac{4r^2 - b^2}{4r^2} \hat{x} - v_0 \frac{b\sqrt{4r^2 - b^2}}{4r^2} \hat{y} \quad (5)$$

$$\vec{v}_2 = v_0 \frac{b^2}{4r^2} \hat{x} + v_0 \frac{b\sqrt{4r^2 - b^2}}{4r^2} \hat{y}. \quad (6)$$

Critérios de avaliação:

Conservação de momento linear = 0,5 pt

Indicar que o impulso atua na direção normal = 0,5 pt

Utilizar o coeficiente de restituição = 0,5 pt

Chegar a expressões corretas = 1,0 pt

Gabarito A.2:

Se $e=0$, a componente perpendicular a superfície de contato se anula. A componente paralela à superfície permanece inalterada.

$$\vec{v}'_1 = \frac{v_0}{2} \text{sen}\theta (-\text{sen}\theta \hat{x} - \cos\theta \hat{y}). \quad (7)$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_1 = \frac{v_0}{2} \cos^2\theta \hat{x} - \frac{v_0}{2} \cos\theta \text{sen}\theta \hat{y}. \quad (8)$$

Enquanto, para a esfera 2,

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{CM} - \vec{v}'_2 = \frac{v_0}{2} (1 + \text{sen}^2\theta) \hat{x} + \frac{v_0}{2} \cos\theta \text{sen}\theta \hat{y}. \quad (9)$$

Critérios de avaliação:

Conservação de momento linear = 0,5 pt

Indicar que o impulso atua na direção normal = 0,5 pt

Utilizar o coeficiente de restituição = 0,5 pt

Chegar a expressões corretas = 1,0 pt

Gabarito A.3:

A energia mecânica total pode ser calculada como

$$E_M = \frac{m}{2} \sum_i v_i^2. \quad (10)$$

Por inspeção direta, verifica-se que A.1 esse resultado é o mesmo antes e depois da colisão. Veja:

$$E_{final} = \frac{mv_0^2}{2} \frac{1}{(4r^2)^2} [(4r^2 - b^2)^2 + b^4 + 2b^2(4r^2 - b^2)] = \frac{mv_0^2}{2} = E_{inicial}. \quad (11)$$

Para A.2, a energia dissipada corresponde às energias associadas às componentes das velocidades perpendiculares à superfície de colisão, com respeito ao centro de massa

$$\Delta E_M = -2 \left(\frac{m}{2} v_{\perp}^2 \right) = -\frac{mv_0^2}{4} \cos^2 \theta. \quad (12)$$

Critérios de avaliação:

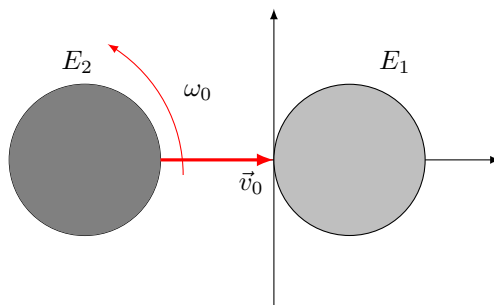
Demonstrar conservação de energia em A.1 = 1,0 pt

Cálculo de energia dissipada em A.2 = 1,0 pt

obs: Raciocínios parcialmente corretos, que contemplem parcelas de translação e rotação podem valer até 0.5 pt/situação considerada.

Parte B - Colisão com rotação e deslizamento contínuo (7 pontos)

Nessa segunda parte, considere uma colisão de parâmetro de choque b nulo. A superfície de contato entre a mesa e as bolas é perfeitamente lisa, mas entre uma bola e outra apresenta um coeficiente de atrito μ . Nessa oportunidade, considere que a primeira esfera, E_1 , encontra-se novamente em repouso, enquanto E_2 , desloca-se com velocidade linear $\vec{v} = v_0 \hat{x}$, vinda da posição inicial $\vec{r} = -x_0 \hat{x}$, com $x_0 > 0$, e velocidade angular $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$, isto é, vista como anti-horária se vista por um observador acima da mesa, conforme ilustrado na figura a seguir.



Assuma que o coeficiente de restituição entre as esferas é dado por $e = 1$. Assim como na parte A, denote os vetores velocidade linear das bolas E_1 e E_2 por \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , respectivamente. Analogamente, denote suas velocidades angulares após a colisão por $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$.

Nessa parte do problema, suponha que o deslizamento entre as esfera dura durante todo o intervalo de tempo τ da colisão.

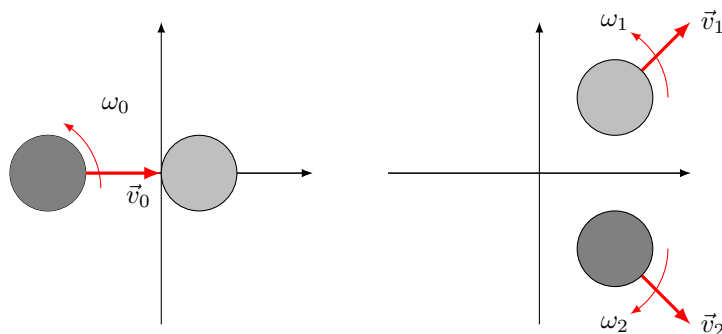
B.1 Determine que relações matemáticas devem ser satisfeitas pelas componentes das velocidades lineares \vec{v}_0 , \vec{v}_1 , \vec{v}_2 das bolas, antes e depois da colisão. 1,0pt

B.2 Determine que relação matemática devem ser satisfeita pelas velocidades angulares $\vec{\omega}_0$, $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ das bolas, antes e depois da colisão. 1,0pt

B.3 Determine o ângulo entre o vetor velocidade \vec{v}_1 da esfera E_1 após o choque e a direção \hat{x} . 2,0pt

B.4 Determine as velocidades lineares e angulares ($\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$) das esferas E_1 e E_2 após colisão. 3,0pt

Gabarito B.1:



Conservação do momento linear:

$$v_{1x} + v_{2x} = v_0 \quad (13)$$

$$v_{1y} + v_{2y} = 0. \quad (14)$$

Critérios de avaliação:

Componente horizontal = 0,5 pt

Componente vertical = 0,5 pt

Gabarito B.2:

Conservação do momento angular do sistema

$$\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \omega_1 + \omega_2. \quad (15)$$

Critérios de avaliação:

Identificar uma troca de torque causado pela força de atrito = 0,5 pt

Chegar a expressão correta ou equivalente = 0,5 pt

Gabarito B.3:

Cálculo das componentes do impulso sobre a esfera 1:

$$I_y = \int f_{at} dt = \int \mu N dt \quad (16)$$

$$I_x = \int N dt. \quad (17)$$

Como essa esfera sai do repouso, segue que

$$\theta_1 = \arctan(\mu). \quad (18)$$

Critérios de avaliação:

Indicar relação entre força normal e de atrito = 0,5 pt

Indicar relação entre I_x e I_y = 0,5 pt

Cálculo correto de θ_1 = 1,0 pt

Gabarito B.4:

O coeficiente de restituição $e=1$ nos garante que $v_{1x} - v_{2x} = v_0$, que, associada a conservação do momento linear fornece as componentes horizontais da velocidade

$$v_{1x} = V_0 \quad e \quad v_{2x} = 0. \quad (19)$$

Do resultado do item anterior:

$$v_{1y} = \mu v_0 \quad e \quad v_{2y} = -\mu v_0. \quad (20)$$

O impulso angular envolvido na colisão é dado por

$$\mathcal{I} = I_y r = I \Delta \omega. \quad (21)$$

Para a E1,

$$m v_0 \mu r = \frac{2}{5} m r^2 \omega_1 \quad (22)$$

$$\omega_1 = \frac{5 \mu v_0}{2r}. \quad (23)$$

Para a E2,

$$\omega_2 = \omega_0 - \frac{5 \mu v_0}{2r}. \quad (24)$$

Critérios de avaliação:

Uso do correto do coeficiente de restituição = 0,5 pt

Expressões de velocidade lineares horizontais corretas = 0,5 pt

Expressões de velocidade lineares verticais corretas = 0,5 pt

Relação entre impulso linear e angular = 1,0 pt

Expressões de velocidade angulares corretas = 0,5 pt

Parte C - Colisão com rotação e deslizamento parcial (6 pontos)

Nesta terceira e última parte do problema, considere a mesma condição inicial da parte B, isto é, E_1 encontra-se em repouso, enquanto E_2 , desloca-se com velocidade linear $\vec{v} = v_0 \hat{x}$ e velocidade angular $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$. A colisão continua perfeitamente elástica, no entanto verifica-se agora que, ao final da colisão entre as esferas, não há deslizamento entre suas superfícies, ou seja, a duração do deslizamento é menor que intervalo de tempo τ da colisão.

Faça o que se pede nos itens a seguir.

C.1 Determine as velocidades lineares e angulares ($\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$) das esferas E_1 e E_2 após colisão na situação descrita. 3,0pt

C.2 Calcule a energia mecânica dissipada na colisão nessa situação. Como se pode explicar a dissipação de energia mesmo quando $e = 1$? 3,0pt

Gabarito:

C.1) Valem nessa nova situação as mesmas relações de conservação encontradas em B.1. As componentes x das velocidades lineares são idênticas à situação anterior.

$$v_{1x} = v_0 \quad e \quad v_{2x} = 0. \quad (25)$$

A condição de não deslizamento pode ser expressa por

$$\omega_2 r - v_y = \omega_1 r + v_y \quad (26)$$

$$\omega_0 - 2\omega_1 = \frac{2v_y}{r}. \quad (27)$$

Da relação de impulso I_y e impulso angular \mathcal{L} , segue que

$$mv_y r = I\omega_1$$

$$v_y = \frac{2}{5}\omega_1 r \quad (28)$$

Substituindo 28 em 27, segue que

$$\omega_1 = \frac{5}{14}\omega_0 \quad e \quad \omega_2 = \frac{9}{14}\omega_0. \quad (29)$$

Finalmente, calculamos v_y :

$$v_y = \frac{2}{5} \frac{5}{14} \omega_0 r = \frac{\omega_0 r}{7}. \quad (30)$$

Finalmente, segue que:

$$\vec{v}_1 = v_0 \hat{x} + \frac{\omega_0 r}{7} \hat{y} \quad (31)$$

$$\vec{v}_2 = -\frac{\omega_0 r}{7} \hat{y} \quad (32)$$

$$\vec{\omega}_1 = -\frac{5}{14} \omega_0 \hat{z} \quad (33)$$

$$\vec{\omega}_2 = \frac{9}{14} \omega_0 \hat{z}. \quad (34)$$

Critérios de avaliação:

Velocidades lineares v_x corretas = 0,5 pt

Condição de não deslizamento = 1,0 pt

Relação entre v_y e ω_1 = 0,5 pt

Velocidades lineares v_y corretas = 0,5 pt

Velocidades angulares corretas = 0,5 pt

Continua:

C.2) A energia mecânica inicial do sistema é dada por

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{I\omega_0^2}{2}, \quad (35)$$

enquanto a energia final é dada por

$$E_f = \frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2) + \frac{I}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2). \quad (36)$$

Para calcular a energia dissipada, calcula-se $\Delta E = E_f - E_0$ e substitui-se os resultados determinados no item anterior

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot mr^2 \omega_o^2 \left[\frac{5}{49} + \frac{81}{14^2} + \frac{25}{14^2} - 1 \right] \approx -0,07mr^2 \omega_o^2. \quad (37)$$

A dissipação de energia justifica-se pelo trabalho do atrito dinâmico durante o deslizamento entre as bolas envolvidas na colisão.

Critérios de avaliação:

Decomposição de energia em energia de translação e rotação = 0,5 pt

Cálculo correto da energia inicial = 0,5 pt

Cálculo correto da energia final = 0,5 pt

Cálculo da energia dissipada = 0,5 pt

Associar trabalho da força de atrito à energia dissipada = 1,0 pt

Q2 - Termodinâmica de Reações Químicas (20 pontos) ²

Nos cursos introdutórios de termodinâmica, a energia interna U de um sistema macroscópico, como um gás, geralmente é relacionada aos seus componentes microscópicos – as partículas (átomos ou moléculas) – por meio da teoria cinética. No caso de um gás monoatômico, com todas as partículas no estado fundamental, por exemplo, a energia interna é simplesmente a soma da energia cinética média de todas as partículas.

No caso mais geral, o gás pode ser formado por diversos tipos moléculas que, além de transladar, podem vibrar e rotacionar. Além disso, átomos e moléculas podem sofrer reações químicas em um dado sistema termodinâmico, de modo que uma transição entre dois estados em equilíbrio termodinâmico pode implicar não somente uma mudança na pressão, volume, temperatura ou entropia, mas também uma mudança na composição química do gás. Neste problema vamos explorar algumas propriedades de sistemas termodinâmicos com composição química variável, isto é, que sofrem reações químicas.

Parte A - Energia Interna e Entalpia em sistemas não-reativos (6 pontos)

Em sistemas de composição fixa, costuma-se considerar apenas a energia associada à translação dos átomos e moléculas para a energia interna U do sistema. No caso de sistemas de composição química variável, deve-se considerar que a energia interna abrange não só a energia cinética das partículas, mas também a energia potencial associada à formação de ligações químicas intramoleculares. Considere válida a aproximação do gás ideal ao longo de todo o problema e despreze quaisquer interações intermoleculares entre os gases.

Considere um sistema termodinâmico em equilíbrio consistindo em um gás contendo um número M de diferentes tipos de moléculas ou átomos, com uma composição de equilíbrio $\{N_1, \dots, N_i, \dots, N_M\}$, onde N é o número de partículas do tipo i .

A.1 Mostre que a energia interna do sistema pode ser escrita como uma função linear da temperatura, $U = CT + D$, em que $C = f(\{N_i\})$ e $C > 0$, $D = g(\{N_i\})$, ou seja, os parâmetros C e D são função apenas da composição química do sistema em equilíbrio termodinâmico.	3pt
---	-----

Temperatura T , volume V , energia interna U são variáveis de estado comumente utilizadas para descrever sistemas físicos. Dependendo da circunstância, pode ser interessante utilizar outras variáveis de estado derivadas destes, como, por exemplo, a entalpia, definida como $H = U + PV$.

Mantendo sua composição química permanece inalterada, o sistema transita entre dois estados de equilíbrio termodinâmico, em que o estado inicial tem temperatura T_i e o estado final tem temperatura T_f .

A.2 Demonstre que, na situação de composição química fixa, a variação de entalpia ΔH de um sistema que sofre uma transformação isobárica é igual ao calor trocado na transformação.	1,5pt
--	-------

A.3 Demonstre que, na situação de composição química fixa, se $T_f > T_i$ então sempre se verifica $U_f > U_i$ e $H_f > H_i$.	1,5pt
---	-------

²Autoria de Marco Ridenti

Gabarito:**A.1**

Em um gás monoatômico ideal, a energia total da partícula é dada pela soma da energia cinética média de todas as partículas, que é $(3/2)kT$, isto é, $(1/2)kT$ para cada grau de liberdade de acordo com o teorema de equipartição de energia. Logo, $U = CT$, onde $C = (3/2)NkT$, onde N é a densidade de partículas. No caso geral de um gás com vários tipos de moléculas, o teorema de equipartição de energia garante que a cada grau de liberdade do sistema, seja ele translacional, rotacional ou vibracional, está associado um termo proporcional a T . Portanto, não importa o número diferente de moléculas no gás: a energia interna será proporcional à temperatura. Tomando como exemplo a molécula O_2 , teremos três graus de liberdade de translação, dois graus de liberdade de rotação e um grau de liberdade de vibração - lembrando que no caso da vibração a energia fica dividida entre energia cinética e potencial. Dessa forma, a energia cinética média da molécula O_2 será:

$$\langle \epsilon \rangle = \epsilon_t + \epsilon_{rot} + \epsilon_{vib} = \frac{3}{2}kT + kT + kT = \frac{7}{2}kT \quad (1)$$

No sistema em questão, a composição química pode se alterar. A cada tipo de molécula j pode ser associada uma energia potencial $\langle v_j \rangle$, que passa agora a fazer parte da energia interna total do sistema. Esse termo pode ser escrito como

$$\langle v \rangle = \sum_j^M N_j \langle v_j \rangle \quad (2)$$

onde N_j é a densidade de partículas do tipo j . Esse corresponde ao termo D do enunciado. Note que esse termo não depende explicitamente da temperatura, já que uma vez que o sistema alcança o equilíbrio químico, ele dependerá apenas da composição.

Observação: Em muitos casos, o espaçamento entre os níveis vibracionais é muito maior do que a energia térmica média (kT). Nesse caso, o estado vibracional fica “congelado” em um estado, e não deve ser considerado no cômputo da energia média. A transição entre o limite “congelado” e o limite térmico exige um tratamento detalhado de mecânica estatística e mecânica quântica.

Critérios de avaliação:

Indicar que U pode ser obtida sobre uma soma de U_i de cada espécie = 0,5 pt

Invocar o teorema da equipartição de energia = 0,5 pt

Indicar a dependência do parâmetro C com a geometria das espécies envolvidas = 0,5 pt

Fornecer ou indicar uma expressão correta para C = 0,5 pt

Identificar D com as energias de ligação envolvidas = 0,5 pt

Fornecer ou indicar uma expressão correta para D = 0,5 pt

Continua:**A.2**

Da primeira lei da termodinâmica

$$Q_p = \Delta U + W = \Delta U + P\Delta V \quad (3)$$

$$Q_p = \Delta(U + PV) = \Delta H. \quad (4)$$

Critérios de avaliação:

Invocou a primeira lei da termodinâmica = 0,5 pt

Cálculo de Q_p = 0,5 pt

Identificação de Q_p com ΔH = 0,5 pt

Continua:

A.3

Não havendo reação química, então $\Delta D = 0$. Além disso, também C permanece constante. Portanto, a variação da energia interna será

$$\Delta U = C\Delta T . \quad (5)$$

Como $C > 0$, se $\Delta T > 0$, então $\Delta U > 0$. Já a variação de entalpia H , onde $H = U + PV$, é igual a

$$\Delta H = \Delta U + p_2V_2 - p_1V_1 = \Delta U + NR(T_f - T_i) . \quad (6)$$

Como $\Delta U > 0$, então $\Delta H > 0$.

Critérios de avaliação:

Demonstrar resultado para $\Delta U = 0,5$ pt

Demonstrar que H também é um função linear de $T = 0,5$ pt

Demonstrar resultado para $\Delta H = 0,5$ pt

Parte B - Energia Interna e Entalpia em sistemas reativos (6 pontos)

Consideremos uma situação diferente agora: M espécies químicas, inicialmente separadas, mas à mesma temperatura T_i , são colocada para reagir em um mesmo recipiente. O sistema transita de um estado de composição inicial $\{N_i\}$ para um estado de equilíbrio termodinâmico de composição de equilíbrio final $\{N_f\}$ e temperatura $T_f \neq T_i$.

B.1 Explique, no caso em que uma reação química ocorre no sistema gasoso, como é possível observar $U_f < U_i$ mesmo quando $T_f > T_i$. 1pt

Considere que a transformação descrita no início da parte B ocorre em um sistema termicamente fechado, ou seja, não recebe calor do exterior nem transfere calor para o exterior.

B.2 Calcule a variação de energia interna é ΔU para o caso de um recipiente mantido a volume constante. 1,5pt

B.3 Calcule a variação de entalpia é ΔH para o caso de um recipiente isolado com pistão móvel e mantido a pressão constante. 1,5pt

Considere um processo semelhante ao descrito no item **B.1** e que o processo ocorre em um recipiente isolado com um pistão móvel e pressão constante. Os químicos costumam tabelar a variação de entalpia ΔH_0 para reações que ocorrem a uma pressão e temperatura padrão, P_0 e T_0 , respectivamente. Assuma que a temperatura T_0 esteja compreendida entre as temperaturas inicial e final do sistema, isto é, $T_i < T_0 < T_f$ ou $T_f < T_0 < T_i$.

Para resolver os itens que seguem, lembre-se que a entalpia é uma função de estado. As funções de estado tem a seguinte propriedade: a variação da função de estado entre dois estados de equilíbrio não depende do processo de transição.

B.4 Quais são as condições sobre ΔH_0 para que $T_f > T_i$ e quais as condições sobre ΔH_0 para que $T_f < T_i$. Justifique. 2pt

Gabarito:**B.1**

O objetivo desse problema é mostrar que é possível que uma variação da energia interna negativa seja acompanhada de um aumento de temperatura, pois nesse caso a energia interna também contabiliza a variação da energia potencial das espécies químicas. Podemos escrever a variação da energia interna como

$$C_f T_f - C_i T_i + \Delta D = \Delta U \implies T_f C_f \left(1 - \frac{C_1 T_1}{C_2 T_2} \right) + \Delta D = \Delta U . \quad (7)$$

Na situação final, as espécies químicas devem se reorganizar na configuração de menor energia potencial possível, de modo que $\Delta D < 0$. Se $C_f T_f > C_i T_i$, então

$$\Delta U - \Delta D = T_f C_f \left(1 - \frac{C_i T_i}{C_f T_f} \right) > 0 . \quad (8)$$

É necessário e suficiente, portanto, que

$$|\Delta D| > T_f C_f \left(1 - \frac{C_i T_i}{C_f T_f} \right) \quad (9)$$

para que $\Delta U < 0$. No caso em que $C_f T_f < C_i T_i$, então sempre $\Delta U < 0$.

Critérios de avaliação:

Uma vez que há diferentes formas de se abordar a situação, a explicação será avaliada como um todo, devendo ser enquadrada em um dos casos.

- 1) Fornecimento de elementos físicos relevantes, mas sem um raciocínio estruturado = 0,25 pt
- 2) Explicação incompleta e ou com incorreções = 0,5 pt
- 3) Explicação completa e correta = 1,0 pt

Continua: B.2

A primeira lei da termodinâmica precisa agora ser adaptada, pois a conservação geral do sistema deve incluir também a variação de energia potencial química (ΔE_q), de maneira que a variação da energia interna deve ser escrita como

$$\Delta U = Q - W + \Delta E_q . \quad (10)$$

No primeiro caso – recipiente isolado rígido – o processo não envolve trabalho, de modo que $W = 0$. Em geral, o calor Q pode vir da troca térmica com o ambiente externo Q_{ext} ou de alguma fonte interna, Q_{int} , como é o caso das reações químicas. Assim, $Q = Q_{ext} + Q_{int}$. Como $Q_{ext} = 0$, temos então

$$\Delta U = Q_{int} + \Delta E_q . \quad (11)$$

Por tratar-se de um processo espontâneo, então necessariamente $\Delta E_q < 0$. Se $Q_{int} < |\Delta E_q|$, então a energia química excedente desaparece – o que é absurdo – ou é trocada com o exterior, que por hipótese é falso. Pelo mesmo raciocínio demonstra-se que $Q_{int} > |\Delta E_q|$ também é impossível neste caso. A única solução possível é $Q_{int} = -\Delta E_q$, que implica $\Delta U = 0$.

Critérios de avaliação:

- Primeira lei da termodinâmica = 0,5 pt
Trabalho e calor nulo = 0,5 pt
Demonstrar que ΔU deve ser nulo = 0,5 pt

Continua: B.3

No segundo caso, o processo é acompanhado de trabalho, de modo que

$$\Delta U + W = Q_{int} + \Delta E_q . \quad (12)$$

Em um processo isobárico, $\Delta U + W = \Delta H$, isto é, a soma da variação da energia interna ao trabalho é igual à variação da entalpia. Logo, neste caso, temos

$$\Delta H = Q_{int} + \Delta E_q . \quad (13)$$

Pelo mesmo raciocínio usado anteriormente, concluímos que $Q_{int} = -\Delta E_q$, o que implica em $\Delta H = 0$.

Critérios de avaliação:

Primeira lei da termodinâmica = 0,5 pt

Cálculo do trabalho e calor no processo = 0,5 pt

Demonstrar que ΔH deve ser nulo = 0,5 pt

Gabarito:**B.4**

A variação de entalpia total será $\Delta H = 0$. Além disso, como a entalpia é uma função de estado, essa variação não depende do processo que leva o sistema de uma temperatura T_i e composição $\{N_i\}$ para uma temperatura T_f e composição $\{N_f\}$. Se $T_f > T_i$, podemos supor que o sistema transita entre os dois estados pelo seguinte caminho: (i) $T_i \rightarrow T_0$, sem mudança de composição; (ii) $\{N_i\} \rightarrow \{N_f\}$, sem mudança de temperatura; e $T_0 \rightarrow T_f$, sem mudança de composição. Dessa forma, a variação total de entalpia será dada por:

$$\Delta H = \Delta H(T_i \rightarrow T_0) + \Delta H_0 + \Delta H(T_0 \rightarrow T_f) \quad (14)$$

Como neste caso $T_0 > T_i$ e $T_f > T_0$, então $\Delta H(T_i \rightarrow T_0) > 0$ e $\Delta H(T_0 \rightarrow T_f) > 0$. Como $\Delta H = 0$, então

$$\Delta H_0 = -\Delta H(T_i \rightarrow T_0) - \Delta H(T_0 \rightarrow T_f) \quad (15)$$

Logo, $\Delta H_0 < 0$, que é a condição para que a reação seja exotérmica. Usando um raciocínio análogo para o caso em que $T_0 > T_f$, temos que $\Delta H_0 > 0$, que é a condição para que a reação seja endotérmica.

Critérios de avaliação:

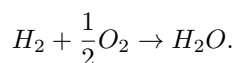
Identificou o caminho em três etapas = 0,5 pt

Indicou que a variação de entalpia da primeira e terceira etapa é positiva = 0,5 pt

Chegou à condição $\Delta H_0 < 0$ aplicando condição de variação total de entalpia = 1,0 pt

Parte C - Queima de gás hidrogênio (8 pontos)

Vamos tentar aplicar os resultados que vimos anteriormente para a reação de queima de gás hidrogênio na presença de oxigênio, expressa pela reação química



Suponha que a energia armazenada nas ligações químicas pode ser estimada como a soma das energias de ligação em cada espécie, a saber:

$$E_{H-H} = 436 \text{ kJ/mol};$$

$$E_{H-O} = 463 \text{ kJ/mol};$$

$$E_{O=O} = 495 \text{ kJ/mol}.$$

Suponha que em um recipiente isolado dentro no qual existem inicialmente 1 mol de gás hidrogênio e 1 mol de oxigênio à 25°C e 1 atm. A reação de queima acontece de forma controlada e lenta até o sistema atinge uma nova configuração de equilíbrio. Se necessário, utilize o valor da constante universal dos gases $R = 8,31 \text{ J/mol K}$.

C.1 Sendo x o número de mols de H_2 consumidos pela reação de queima descrita, estime os parâmetros $C(x)$ e $D(x)$ definidos na parte **A.1**. Desconsidere efeitos de vibrações moleculares. 1,5pt

C.2 Supondo que a reação acontece de forma isocórica, estime a máxima temperatura que pode ser atingida pela mistura gasosa. Essa situação acontece ao final ou durante a reação química? 2,5pt

C.3 Supondo que a reação acontece de forma isobárica, com o uso de um pistão móvel, qual a temperatura T_f do sistema gasoso ao final da reação? 2,5pt

C.4 À medida que a temperatura de um sistema gasoso eleva-se, o efeito das vibrações moleculares se torna cada vez mais relevante para uma descrição acurada de suas propriedades termodinâmicas. Explique, qualitativamente, como esse efeito afetaria as temperaturas calculadas nos itens **C.2** e **C.3**. 1,5pt

Gabarito:

C.1 Capacidade molar do $H_2 = 5R/2$. Capacidade molar do $O_2 = 5R/2$. Capacidade molar do $H_2O = 3R$. Considerando que x mol de H_2 são consumidos na reação, tem-se o consumo de $x/2$ mol de O_2 e produção de x mol de H_2O .

A capacidade térmica do gás é dada por

$$C_v = (1 - x)5R/2 + (1 - x/2)5R/2 + x3R. \quad (16)$$

$$C_v = 5R - 3xR/4 = (41,55 - 6,23x)J/K. \quad (17)$$

O parâmetro D é estimado como a soma das energias de ligação

$$D = (1 - x)E_{H_2} + (1 - x/2)E_{O_2} + x(2E_{HO}). \quad (18)$$

$$D = (931 - 242x).10^3 J. \quad (19)$$

Critérios de avaliação:

Determinação da quantidade de cada espécie em termos de $x = 0,5$ pt

Cálculo de $C(x) = 0,5$ pt

Cálculo de $D(x) = 0,5$ pt

Continua: C.2

A variação de energia interna de uma transformação isocórica é dada por $\Delta U = 0$.

Da condição inicial do sistema, é possível calcular a energia interna do sistema $U_0 = 41T + 931.10^3 = 943.10^3 J$.

Da conservação de energia interna, tem-se que

$$943.10^3 = (41,55 - 6,23x)T + (931 - 242x).10^3 \quad (20)$$

$$T = \frac{12 + 242x}{41 - 6,2x}.10^3 K. \quad (21)$$

A temperatura máxima é atingida ao final da reação química ($x = 1$), isso pode ser verificado por inspeção imediata uma vez que o numerador é função crescente de x e o denominador é função decrescente de x . A estimativa de temperatura máxima atingida, portanto, pode ser feita substituindo $x = 1$ na equação anterior

$$T_f = 7298K. \quad (22)$$

Critérios de avaliação:

Utilizou a condição ΔU nula no processo isocórico = 0,5 pt

Expressão de $T(x)$ = 1,0 pt

Provar que a maior temperatura acontece no fim da reação = 0,5 pt

Cálculo de T_{max} = 0,5 pt

Continua: C.3

A variação de entalpia de uma transformação isobárica é dada por $\Delta H = 0$. Da equação de Clapeyron, temos que $H = U + PV = (CT + D) + nRT = (C + nR)T + D$.

A expressão da entalpia do sistema, após o consumo de x mol de H_2 , é dado por

$$H(x) = (57,62 - 10,35x)T - (931 - 242x).10^3. \quad (23)$$

A entalpia inicial é dada por $H_0 = H(0) = 947,9.10^3 J$.

Da conservação de entalpia, segue que

$$(57,62 - 10,35x)T - (931 - 242x).10^3 = 947,9.10^3 \quad (24)$$

$$T = \frac{16,9 + 242x}{57,62 - 10,35x}.10^3 K. \quad (25)$$

A temperatura final é dada por

$$T_f = 5477K. \quad (26)$$

Critérios de avaliação:

Utilizou a condição ΔH nula no processo isocórico = 0,5 pt

Expressão de $H(x)$ = 0,5 pt

Expressão de $T(x)$ = 1,0 pt

Cálculo de T_{max} = 0,5 pt

Continua:**C.4**

A contribuição dos modos vibracionais entra como novos graus de liberdade do sistema, consequentemente aumentando a capacidade térmica molar da mistura gasosa. O aumento do parâmetro C, portanto, tem o efeito de redução das estimativas de temperaturas obtidas anteriormente.

Critérios de avaliação:

Indicar que novos graus de liberdade são ativados = 0,5 pt

Indicar aumento da capacidade térmica = 0,5 pt

Indicar que as estimativas obtidas são superestimadas = 0,5 pt

Q3 - Problema de Dois Corpos Relativístico³ (20 Pontos)

Neste problema abordaremos efeitos de relatividade geral em órbitas planetárias. Em todas as partes deste problema, consideramos a órbita de uma massa m ao redor de uma massa M com $M \gg m$. Os efeitos relativísticos tornam-se relevantes para fortes campos gravitacionais e alguns de seus efeitos podem ser investigados com argumentos físicos simples.

A equação principal que usaremos para descrever este problema é denominado a *métrica de Schwarzschild*:

$$-c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 d\theta^2, \quad (1)$$

em que c é a velocidade da luz, as coordenadas tempo, t , raio, r , e ângulo θ são observadas a partir de um observador distante no infinito, e τ é o *tempo próprio* da massa m . O parâmetro r_s é chamado de raio de Schwarzschild de M . Essa equação relaciona um diferencial de tempo próprio com diferenciais de tempo e espacial medidas no infinito.

Este resultado é análogo ao intervalo invariante que temos em relatividade especial

$$-c^2 d\tau^2 = \Delta s^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2)$$

porém mais geral, uma vez que é capaz de lidar com referenciais acelerados.

Note: Embora a equação acima seja originada de relatividade geral, neste problema não é necessário saber nada de relatividade geral, e precisa ser usado apenas a equação (1) fornecida acima.

Neste problema, começaremos na **Parte A** obtendo o raio de Schwarzschild e obtendo o *potencial efetivo* com correções relativísticas. Em seguida, na **Parte B**, analisaremos como esse potencial efetivo afeta órbitas circulares, encontrando condições limitantes de movimento. Finalmente, na **Parte C** analisaremos efeitos de estabilidade e efeitos de precessão, comparando os resultados com a órbita de mercúrio.

Parte A - Dinâmica do Movimento (3 Pontos)

Nesta primeira parte do problema, analisaremos a dinâmica desse problema de dois corpos relativístico. Antes de analisar efeitos de relatividade no entanto, vamos começar encontrando uma expressão para o raio de Schwarzschild r_s .

Buracos negros são corpos celestes extremamente massivos e compactos. O campo gravitacional em torno desses corpos é tão intenso que consegue confinar até mesmo um raio de luz. Dada uma massa M , é possível calcular classicamente o raio r_s de uma esfera dentro da qual a massa, caso confinada, tornar-se-ia um buraco negro.

A.1 Encontre uma expressão para o raio de Schwarzschild r_s considerando a condição de velocidade de escape clássica do corpo de massa M para um fóton. 1.0pt
--

Há duas constantes de movimento do movimento orbital em torno de M que podem ser exploradas. A primeira delas é o movimento angular $L \equiv mr^2 \frac{d\theta}{d\tau}$. A segunda constante de movimento se trata da energia, que pode ser escrita como:

$$E = mc^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \quad (3)$$

Combinando as equações acima, podemos considerar efeitos da dinâmica orbital do nosso sistema. Começaremos obtendo uma equação para $\frac{dr}{d\tau}$, e em seguida obteremos o potencial efetivo $U(r)$ do nosso sistema relativístico.

A.2 Dada as expressões fornecidas, encontre $\frac{dr}{d\tau}$, em termos de constantes fornecidas. 1.0pt

³Autoria de Thomas Bergamaschi

Com o resultado acima, podemos obter uma expressão para a “energia cinética efetiva”

$$K = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 \quad (4)$$

em função de variáveis do sistema. Observe que essa quantidade K não é a energia cinética real e apenas uma analogia a ela. Dado isso, podemos definir o potencial efetivo $U(r)$ como termos dependendo apenas de r de forma que $K + U(r)$ é uma constante do movimento.

- A.3** Com a expressão encontrada em **A.2** e a discussão acima, encontre o potencial efetivo $U(r)$ desse problema de dois corpos relativístico. Você vai perceber que temos uma certa liberdade em escolher $U(r)$. Para resolver possíveis ambiguidades, escolha $U(r)$ tal que $U(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.
O que difere $U(r)$ com o potencial gravitacional clássico mais comum? 1.0pt

Parte B - Efeito em órbitas circulares (6 Pontos)

Com a expressão do potencial efetivo $U(r)$ temos informação suficiente para caracterizar a dinâmica do sistema como um problema unidimensional radial. Caso você não tenha feito a parte A, assuma que o potencial efetivo por ser escrito como

$$U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} - \frac{\alpha}{r^3}, \quad (5)$$

em que os dois primeiros têm natureza clássica e o terceiro termo constitui a correção relativística ao potencial gravitacional. Começaremos fazendo uma breve análise do problema de dois corpos clássico, encontrando o raio orbital de movimento neste caso.

- B.1** Assumindo o potencial efetivo clássico, $U_C(r)$, obtenha o raio r_C da órbita circular da órbita de momento angular L . 0.2pt

Consideramos agora o potencial efetivo relativístico completo e analisaremos quais os raios das órbitas neste caso. Estes raios orbitais relativísticos diferem substancialmente das expressões clássicas, e analisaremos implicações disso nesta parte do problema. Agora, voltamos a considerar efeitos relativísticos caracterizados pelo potencial efetivo $U(r)$ encontrado na **Parte A** do problema.

- B.2** Considerando o potencial efetivo $U(r)$ encontrado em **A.3**, obtenha expressões para os raios r_i onde o sistema apresenta órbitas circulares. Escreva o resultado em termos de r_s e $\eta \equiv \frac{L^2}{m^2 c^2 r_s}$. Também esboce um gráfico desses raios divididos por r_s , sobreposto com o raio clássico r_C encontrado previamente, em função de η/r_s . 2.0pt

- B.3** Com base em $U(r)$ discuta a estabilidade das órbitas circulares encontradas com base no seu gráfico. 2.0pt

- B.4** Existe um valor de momento angular crítico L_C tal que o sistema pare de admitir órbitas circulares se $L < L_C$. Encontre L_C . 1.0pt

Finalmente, com os resultados acima podemos analisar órbitas de partículas sem massa ao redor de uma massa M . Essa órbita é denominada a *esfera de fótons*, e caracteriza a região de espaço onde gravidade é suficientemente forte tal que fótons viajam em órbitas circulares em torno de um buraco negro.

- B.5** Considerando o limite $\eta \gg 1$, encontre o valor do raio da esfera de fótons. 0.8pt

Parte C - Efeitos de Estabilidade e Precessão (11 Pontos)

Nesta terceira e última parte, analisaremos como o potencial efetivo $U(r)$ gera efeitos de precessão orbital. Para isso, consideraremos uma órbita **quase clássica** e **estável**. Primeiramente, vamos obter o valor do raio orbital deste movimento.

- | | | |
|------------|--|-------|
| C.1 | Em qual limite de η , temos uma órbita quase clássica? Usando seus resultados da Parte B encontre uma expressão aproximada para o raio dessa órbita estável r . Nesta mesma aproximação encontre uma expressão para a velocidade angular da órbita ω_θ . | 1.0pt |
|------------|--|-------|

Tendo em mente este raio orbital r encontrada no item acima, e efeitos de estabilidade da **Parte B**, analisemos oscilações radiais do movimento orbital.

- | | | |
|------------|---|-------|
| C.2 | Considerando os efeitos de estabilidade discutidos no item B.3 , considere uma pequena perturbação radial na órbita tal que a massa m passe a oscilar com uma frequência de oscilação ω_r . Encontre ω_r . | 3.0pt |
|------------|---|-------|

- | | | |
|------------|---|-------|
| C.3 | Dados os resultados encontrados previamente, calcule o ângulo de precessão $\Delta\phi$ da ponta da órbita por período de revolução de m em torno de M . Deixe sua resposta em função de m , M , L e constantes físicas universais. | 3.0pt |
|------------|---|-------|

Os resultados acima foram obtidos assumindo uma órbita circular. No entanto, pode se estender os resultados acima para uma órbita elíptica e obter resultados análogos. Tendo em vista esse resultado, considere que m descreve uma órbita aproximadamente elíptica no resto deste problema.

O resultado acima está expressado em função do momento angular L . Como estamos tratando agora de uma órbita elíptica, é mais conveniente expressar o ângulo de precessão em função da excentricidade, ϵ , e semieixo maior da elipse, a .

- | | | |
|------------|---|-------|
| C.4 | Escreva uma expressão capaz de fornecer o ângulo de precessão $\Delta\phi$ em termos de M , a , ϵ e constantes físicas universais. | 2.0pt |
|------------|---|-------|

Essa taxa de precessão acima, é denominada a taxa de *precessão absidal*.

A massa m descreve uma trajetória aproximadamente elíptica, porém, os efeitos relativísticos resultam em uma lenta precessão do eixo principal da elipse. A órbita de mercúrio possui uma excentricidade $\epsilon = 0.21$, um semi-eixo maior de $a = 5,79 \cdot 10^{10}$ m, e um período de translação de 87,97 dias. Adicionalmente, foi medido experimentalmente que durante um período de mercúrio que a taxa de precessão é foi de $\Delta\phi = (2,88 \cdot 10^{-5})^\circ$.

- | | | |
|------------|---|-------|
| C.5 | Com a expressão prévia, e os dados fornecidos acima, calcule a taxa de precessão de mercúrio por órbita. Compute o erro relativo com a taxa real de precessão por órbita. | 2.0pt |
|------------|---|-------|

Gabarito:

A.1) Usando mecânica clássica, temos que a velocidade de escape clássica a uma distância r é $v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$, logo para luz temos um raio de Schwarzschild $r_s = \frac{2GM}{c^2}$

Critérios de avaliação:

Expressão para a velocidade de escape = +1.0 Pontos

Erros de conta = -0.5 Pontos

A.2) Dada a métrica fornecida em (1), dividimos por $d\tau^2$, e obtemos:

$$-c^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 \quad (6)$$

Agora, usamos que $\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{mc^2} \frac{1}{1 - r_s/r}$, e que $\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{L}{mr^2}$. Substituindo acima obtemos:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \sqrt{\frac{E^2}{m^2c^2} - c^2(1 - r_s/r) - \frac{L^2}{m^2r^2}(1 - r_s/r)} \quad (7)$$

Critérios de avaliação:

Dividir a métrica em relação a $d\tau^2$ e resolver para $dr/d\tau = + 1.0$ Pontos

Erros de conta = -0.5 Pontos

A.3) Dado o resultado acima, podemos obter $K = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2$ da forma:

$$K = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{E^2}{2mc^2} - \frac{mc^2}{2}(1 - r_s/r) - \frac{L^2}{2mr^2}(1 - r_s/r) \quad (8)$$

Foi discutido que podemos pensar do potencial efetivo $U(r)$ uma quantia tal que $K + U(r)$ é uma constante de movimento. Naturalmente, podemos escolher $U(r) = \frac{mc^2}{2}(1 - r_s/r) + \frac{L^2}{2mr^2}(1 - r_s/r)$, de forma que $K + U(r) = \frac{E^2}{2mc^2}$ que de fato é uma constante.

Note: pode se incluir o termo $\frac{mc^2}{2}$ em $U(r)$ e obter todos os resultados corretos. Isso é devido ao fato que adicionar constantes a $U(r)$ não altera a física do sistema. No entanto, vamos adotar que $U(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ de forma que:

$$U(r) = \frac{L^2}{2mr^2}(1 - r_s/r) - \frac{mc^2}{2} \frac{r_s}{r} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} - \frac{GML^2}{mc^2} \frac{1}{r^3} \quad (9)$$

Comparando com o potencial efetivo gravitacional clássico, temos a adição do último termo acima que decai com $1/r^3$.

Critérios de avaliação:

Obter uma equação da forma $K + U(r) = C = +0.5$ Pontos

Escolher $U(r)$ tal que $U(r \rightarrow \infty) = 0$ e apontar o termo novo de $1/r^3 = +0.5$ Pontos

Erros de conta = -0.5 Pontos

B.1): Para o potencial clássico, temos simplesmente $r_C = \frac{L^2}{GMm^2}$.

Critérios de avaliação:

Qualquer método coerente (equilibrar forças, demandar mínimo do potencial efetivo clássico) = +0.5 Pontos

B.2): Para achar os raios de órbitas circulares, temos que achar os valores de r_i tal que $\frac{dU(r)}{dr} = 0$. Assim derivando em r , e resolvendo uma equação de segundo grau em r obtemos:

$$r_i = \eta \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3r_s}{\eta}} \right) \quad (10)$$

Observa que temos dois raios de equilíbrio. Para plotar $r_i/r_s = \frac{\eta}{r_s} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3r_s}{\eta}} \right)$ em função de η/r_s note que

$\frac{r_C}{r_s} = 2 \frac{\eta}{r_s}$, obtendo o esboço abaixo:

Critérios de avaliação:

Impor que $dU/dr = 0 = +0.5$ Pontos

Perceber que existem duas soluções e ambas são físicas = + 0.5 Pontos

Obter correto os raios de equilíbrio $r_i = +0.5$ Pontos

Esboço correto com os dois raios obtidos acima e a expressão clássica. Importante mostrar as assintotas, e o comportamento para η/r_s pequeno = + 0.5 Pontos

B.3): Dado $U(r)$, para analisar estabilidade calcularemos $U''(r)$. Para isso obtemos:

$$U''(r) = mc^2 r_s \frac{(3\eta r - r^2 - 6\eta r_s)}{r^5} \quad (11)$$

Para analisar estabilidade, necessitamos que $U'' > 0$, logo precisamos que $3\eta r - r^2 - 6\eta r_s > 0$. Para isso, necessitamos que r esteja entre $\frac{1}{2}(3\eta \pm \sqrt{9\eta^2 - 24\eta r_s}) = \frac{3\eta}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8}{3} \frac{r_s}{\eta}} \right)$. Comparando com $r_i = \eta \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3r_s}{\eta}} \right)$, vemos que r_- está **sempre** fora da região estável, enquanto para r_+ pode ser visto que r_+ está **sempre** entre esses limites de raio (no entanto toca nesses limites em dois valores de η). **Note:** isso faz com que a órbita r_+ seja quase sempre estável, e *meta-estável* nos valores de η onde r_+ intersecta com os limites, que são $\eta/r_s = 3$ e $\eta \rightarrow \infty$.

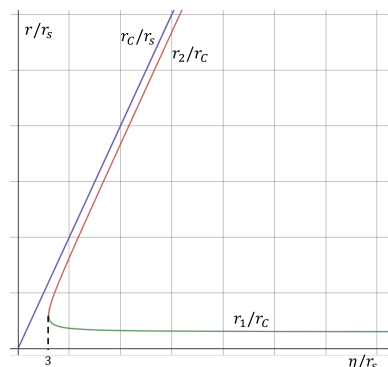
Critérios de avaliação:

Impor que $d^2U/dr^2 > 0 = +0.5$ Pontos

Obter a expressão correta para $d^2U/dr^2 = +0.5$ Pontos

Perceber que r_- é sempre instável = +0.5 Pontos

Provar que r_+ é estável (e metaestável em dois pontos) é consideravelmente trabalhoso, e **não** é necessário discutir a metaestabilidade para pontos integrais. Se for argumentado que a órbita é quase estável = +0.5 Pontos



B.4): Olhando a equação dos raios de equilíbrio, vemos que quando η satisfaz $\frac{3r_s}{\eta} > 1$ não temos soluções reais para r_i . Dessa forma, quando $\eta < 3r_s \Rightarrow \frac{L^2}{m^2 c^2 r_s} < 3r_s \Rightarrow L = mcr_s \sqrt{3}$.

Critérios de avaliação:

Perceber que teremos discriminante negativo para L pequeno = +0.5 Pontos

Obter L_C corretamente = +0.5 Pontos

B.5): No limite $a \rightarrow \infty$, obtemos os raios $r_1 = 2\eta$, e $r_2 = \frac{3}{2}r_s$. Naturalmente, para partículas sem massa $\eta \rightarrow \infty$, e o único raio físico é o $r_2 = \frac{3}{2}r_s$. Este é o raio da esfera de fótons.

Critérios de avaliação:

Considerar o limite $\eta \gg 1$ e perceber que fótons correspondem a $\eta \rightarrow 1$ implicando apenas um raio físico = +0.8 pontos

C.1): No limite quase clássico, temos $\eta \gg 1$. Observa que isso implica raios de equilíbrio 2η e $\frac{3}{2}r_s$, no entanto no limite clássico $r_s \rightarrow 0$, e o único raio que temos é o maior (que também é estável) $r \approx 2\eta$. A velocidade angular segue a expressão conhecida $\omega_\theta^2 = \frac{GM}{r^3} = \frac{GM}{8\eta^3}$.

Critérios de avaliação:

Escolher o raio estável = + 0.5 Pontos

Obter ω_θ corretamente = +0.5 Pontos

C.2): Para encontrar a frequência de pequenas oscilações, calculamos $F(r) = -\frac{dU}{dr}$ e expandimos em Taylor para $r = r_+ + \delta r$. Note que é preciso usar a expressão precisa de r_+ e não a aproximação de 2η . Dessa forma, obtemos:

$$F(r) = -\delta r \left(\frac{mc^2 r_s}{16\eta^3} + 3 \frac{mc^2 r_s^2}{32\eta^4} \right) \quad (12)$$

Isso define um MHS com $\omega_r = \sqrt{\frac{mc^2 r_s}{16\eta^3}} \sqrt{1 + \frac{3r_s}{2\eta}} = \sqrt{\frac{GM}{8\eta^3}} \sqrt{1 + \frac{3r_s}{2\eta}} = \omega_\theta \sqrt{1 + \frac{3r_s}{2\eta}}$.

Critérios de avaliação:

Escolher um método apropriado para a frequência de oscilação (expanding a força, ou d^2U/dr^2) = + 0.5 Pontos

Dado o método acima obter uma expressão correta para $F(r + \delta r)$ ou d^2U/dr^2 = +2.0 Pontos

Obter a frequência do MHS = +0.5 Pontos

C.3): A frequência de precessão vai ser $\omega_\phi = |\omega_r - \omega_\theta|$. Expanding em Taylor ω_r para $\eta \gg 1$, temos $\omega_\phi = \omega_\theta \frac{3r_s}{4\eta}$. Dessa forma, o ângulo de precessão é:

$$\Delta\phi = T\omega_{phi} = \frac{3\pi r_s}{2\eta} = \frac{3\pi r_s}{2L^2} m^2 c^2 r_s = \frac{3\pi m^2 c^2}{2L^2} r_s^2 = \frac{6\pi m^2 G^2 M^2}{L^2 c^2} \quad (13)$$

Onde $T = \frac{2\pi}{\omega_\theta}$, o período da órbita.

Critérios de avaliação:

Expressão correta para a frequência de precessão = + 1.0 Pontos

Expandir o resultado previo usando o limite quase classico = +1.0 Pontos

Obter o angulo total de precessão por orbita = + 1.0 Pontos

C.4): Agora, para eliminar a dependência com o momento angular L a ideia é usar conservação de energia entre o afélio e periélio da órbita. Dessa forma, para o periélio $r_p = a(1 - \epsilon)$ e afélio $r_a = a(1 + \epsilon)$ temos:

$$\frac{L^2}{2mr_p^2} - \frac{GMm}{r_p} = \frac{L^2}{2mr_a^2} - \frac{GMm}{r_a} \quad (14)$$

Note que não precisamos incluir o termo $1/r^3$ para este cálculo já que consideramos uma órbita *quase* clássica, e considerar este termo daria apenas uma correção que quando incluído na expressão de $\Delta\phi$ daria um termo de segunda ordem em $1/c$. Dessa forma, resolvemos a equação acima para $L^2 = GMm^2 a(1 - \epsilon^2)$ e com isso a expressão para o ângulo de precessão é:

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{ac^2(1 - \epsilon^2)} \quad (15)$$

Adicionalmente, é útil eliminar GM usando o período da órbita com $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ de modo que $\Delta\phi = \frac{24\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1 - \epsilon^2)}$.

Critérios de avaliação:

Usar algum metodo para obter L em função da eccentricidade ϵ = +1.0 Pontos

Obter L corretamente = +1.0 Pontos

C.5): Com a expressão acima, obtemos $\Delta\phi \approx 5.02 \cdot 10^{-7}$ rad. Para obter o erro relativo convertamos o valor experimental para radianos e obtemos um erro relativo de $\frac{\Delta\phi_{\text{exp}} - \Delta\phi_{\text{teo}}}{\Delta\phi_{\text{exp}}} \approx 1.39 \cdot 10^{-3}$, indicando que esse valor é realmente muito próximo do real.

Critérios de avaliação:

Obter o valor correto da taxa de precessão = +1.0 Pontos

Comparar com o valor teórico e obter o erro relativo = +1.0 Pontos